ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

Часть I.

ФУНКЦІИ ОДНОГО АРГУМЕНТА.

СОСТАВИЛЪ

по программамъ пріемнаго въ Мих. Арт. Академію экзамена

Г. Д. Гродскій,

Ординарный профессоръ Академіи.

Изданіе IV.

Издалъ В. Березовскій

КОМИССІОНЕРЪ ВОЕННО-УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

Петроградъ, Колокольная, 14.

1915.



8763.

Тип. В. Безобразовъ и К° (Вл. Н. П. Зандманъ), В. О., Больш. пр. 61.

Оглавленіе.

ГЛАВА I.

Дополнительныя статьи изъ алгебры.

§ 1. Теорія соединеній.

1. Опредѣленіе. Соединеніемъ изъ n элементовъ по m наз. группа m элементовъ, выбранныхъ какимъ либо образомъ изъ n данныхъ элементовъ $a, b, c, \ldots k, l$ (при чемъ, конечно, $m \leqslant n$).

Теорія соединеній занимается опредѣленіемъ **числа** различныхъ соединеній изъ n по m. Если при этомъ мы считаемъ различными лишь соединенія, отличающіяся составомъ элементовъ, то эти соединенія наз. **сочетаніями** и число ихъ обозначаютъ знакомъ C_n^m; когда различными считаютъ и соединенія, составленныя изъ однихъ и тѣхъ же элементовъ, но въ разномъ порядкѣ, то ихъ наз. **размѣщеніями**, а число ихъ обозначаютъ символомъ A_n^m; когда же всѣ соединенія составлены изъ однихъ и тѣхъ же n элементовъ и, слѣд., отличаются другъ отъ друга лишь порядкомъ послѣднихъ, то ихъ называютъ **перестановками** n элементовъ, а число ихъ обозначаютъ черезъ P_n. Очевидно, между прочимъ, что $P_n = A_n^n$.

2. Размѣщенія. Теорема. Число возможныхъ размѣщеній n элементовъ $a, b, c, \ldots k, l$ по m равно произведенію m послѣдовательныхъ и убывающихъ цѣлыхъ чиселъ, начинающихся съ числа n, т. е.

$$A_n^m = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m+1).$$

Дѣйствительно, ясно, что размѣщенія по одному суть сами элементы a, b, c, ... k, l, а слѣд., $A_n^1 = $n.

Чтобы составить затѣмъ всѣ размѣщенія по два, надо къ каждому элементу присоединить вслѣдъ за нимъ по очереди каждый изъ прочихъ n—1 элементовъ; такимъ образомъ получимъ размѣщенія.

$$\begin{array}{llllll} ab & ac & ad & & ak & al \\ ba & bc & bd & & bk & bl \\ ca & cd & cd & & ck & cl \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ la & lb & lc & & & lk \end{array}$$

и ясно, что $A_n^2 = n\,(n-1)$.

Значитъ, теорема вѣрна при $m=1$ и при $m=2$; положимъ теперь, что она вѣрна при нѣкоторомъ m; чтобы получить всѣ размѣщенія изъ n по $m+1$, имѣя всѣ размѣщенія изъ n по m, надо, очевидно, къ каждому изъ послѣднихъ, въ концѣ его присоединить по очереди каждый изъ $(n-m)$ невходящихъ въ него элементовъ; дѣйствительно, при этомъ не можетъ получиться одинаковыхъ размѣщеній, ибо они будутъ отличаться либо присоединяемымъ элементомъ, либо первоначальной группой—той, къ которой присоединенъ новый; съ другой стороны мы получимъ всѣ размѣщенія по $n+1$, ибо если, наоборотъ, отъ любого изъ нихъ отнять его послѣдній элементъ, то получится одно изъ размѣщеній по m элементовъ.

Итакъ, $$A_n^{m+1} = A_n^n\,(n-m).$$

т. е. $$A_n^3 = n\,(n-1)\,(n-2);\ A_n^4 = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3);\ \text{и т. д.}$$

Примѣръ. Число способовъ, которыми можно распредѣлить 10 разныхъ лекцій по 4 лекціи въ день, равно

$$A_{10}^4 = 10.\ 9.\ 8.\ 7 = 5040.$$

3. Перестановки. Теорема. Число перестановокъ изъ n разныхъ элементовъ равно произведенію n первыхъ цѣлыхъ чиселъ т. е.

$$P_n = 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (n-1)\ n$$

или, короче—сообразно общепринятому символическому обозначенію:

$$P_n = n!$$

Дѣйствительно, такъ какъ $P_n = A_n^n$, то и имѣемъ, что

$$P_n = n(n-1)\ldots(n-n+1) = n(n-1)\ldots 2.\,1 = 1.\,2.\,3\ldots(n-1)\,n.$$

Примѣръ. Число перестановокъ изъ 3 элементовъ a, b, c, равно 6, а сами эти перестановки таковы:

abc, acb, bca, bac, cba, cab.

4. Перестановки съ повтореніями. Такъ называются перестановки изъ n элементовъ, въ числѣ коихъ есть, напр., p одинаковыхъ одного сорта и q одинаковыхъ другаго сорта. Если число такихъ перестановокъ обозначимъ черезъ $P_{n(p,q)}$ и если, различивъ мысленно одинаковые элементы каждаго сорта другъ отъ друга знаками, сдѣлаемъ въ свою очередь между ними всѣ возможныя перестановки, то получимъ всѣ перестановки изъ n разныхъ элементовъ; такимъ образомъ, очевидно,

$$P_{n\,(p,q)}\; p!\; q! = P_n = n!\,,$$

откуда $$P_{n\,(p,q)} = \frac{n!}{p!\;q!} = \frac{1.2.3.\;.\;.n}{1.2\ldots p.\;1.2\ldots q}$$

Примѣръ 1. Число перестановокъ буквъ въ словѣ „Mississippi" равно $\frac{11!}{4!\;4!\;2!} = \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10.\,11}{1.\,2.\,3.\,4.\;\;1.\,2.\,3.\,4.\;1.\,2} = 5.\,7.\,9.\,10.\,11 = 34650.$

Примѣръ 2. Распредѣленіе 5 лекцій по дифференціальному исчисленію, изъ коихъ 3 посвящено чтенію, и 2—практическимъ занятіямъ, возможно $\frac{5!}{3!\;2!} = 10$ способами.

5. Сочетанія. Теорема 1. Число сочетаній изъ n элементовъ по m равно произведенію m цѣлыхъ, послѣдовательныхъ и уменьшающихся, чиселъ, начинающихся съ числа n, дѣленному на произведеніе m первыхъ цѣлыхъ чиселъ, т. е.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)\,m}$$

Дѣйствительно, если въ каждомъ изъ сочетаній сдѣлаемъ всѣ возможныя перестановки изъ m элементовъ, то получимъ и всѣ возможныя размѣщенія изъ n по m, ибо сочетанія тоже были взяты всѣ возможныя; съ другой стороны всѣ эти размѣщенія будутъ различны, ибо полученныя изъ одного и того же сочетанія различатся

порядкомъ элементовъ, а полученныя изъ разныхъ сочетаній различатся составомъ. Такимъ образомъ

$$C_n^m P_m = A_n^m,$$

откуда и выводимъ, что

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\;.\;.\;.\;.\;m}$$

Слѣдствіе. Такъ какъ число сочетаній есть навѣрное число цѣлое, то заключаемъ, что произведеніе m послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится (безъ остатка) на произведеніе m первыхъ цѣлыхъ чиселъ.

Замѣчаніе. При выписываніи послѣдней дроби въ численныхъ примѣрахъ слѣдуетъ сначала написать множители знаменателя, а потомъ уже множители числителя—по одному надъ каждымъ множителемъ знаменателя.

Примѣръ. Число способовъ выбора трехъ лицъ изъ 10 кандидатовъ равно:

$$\frac{10.\ 9.\ 8.}{1.\ 2.\ 3.} = 120.$$

6. Теорема 2. Число сочетаній изъ n элементовъ по m равно числу сочетаній изъ n элементовъ по n—m.

Дѣйствительно,

$$C_n^m = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\;.\;.\;.\;.\;m} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-m+1)\,[(n-m)\ldots2.1]}{1.2.3\ldots m.\,[(n-m).\,(n-m-1)\ldots2.1]} =$$
$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

и точно также

$$C_n^{n-m} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-[n-m]+1)}{1.2.3\;.\;.\;.\;(n-m)} = \frac{n\,(n-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(n-m)} =$$
$$= \frac{n\,(n-1)\ldots(m+1)}{1.2.\ldots(n-m)} = \frac{n\,(n-1)\ldots(m+1)\ [m\ldots2.1]}{1.2.3\ldots(n-m).\ [m\ldots2.1]} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!},$$

т. е.

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Этой теоремой должно пользоваться при вычисленіи C_n^m каждый разъ, какъ $m > \frac{n}{2}$.

Примѣръ. $C_8^6 = C_8^2 = \frac{8.\ 7}{1.\ 2} = 28.$

Соглашеніе. Исходя изъ этой теоремы условимся считать

$$C_n^0 = 1,$$

такъ какъ

$$C_n^n = 1.$$

7. Теорема 3. Сумма чиселъ сочетаній изъ n элементовъ по m и по $m+1$ равна числу сочетаній изъ $n+1$ элементовъ по $m+1$,

т. е.

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Дѣйствительно, имѣемъ:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n\ (n-1)...(n-m+2)\ (n-m+1)}{1.2.3...\ m} +$$

$$+ \frac{n\ (n-1)...(n-[m+1]+2)\ (n-[m+1]+1)}{1.2.3.\ .\ .\ .\ .\ m\ (m+1)} =$$

$$= \frac{n\ (n-1)...(n-m+2)\ (n-m+1)}{1.2.3...m} +$$

$$+ \frac{n\ (n-1)...(n-m+1)\ (n-m)}{1.2.3...m\ (m+1)} =$$

$$= \frac{n\ (n-1)...(n-m+1)}{1.2.3...m} \left[1 + \frac{n-m}{m+1}\right] =$$

$$= \frac{n\ (n-1)\ (n-2)...(n-m+1)}{1.2.3...m} \cdot \frac{n+1}{m+1} =$$

$$= \frac{(n+1)\ n\ (n-1)\ (n-2)...(n-m+1)}{1.2.3...m\ (m+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)\ n\ (n-1)...[(n+1)-(m+1)+1]}{1.2.3...m\ (m+1)} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Примѣръ 1-й. $C_{11}^8 - C_{10}^8 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10.\ 9.\ 8.}{1.\ 2.\ 3.} = 120.$

Примѣръ 2-й. $C_9^4 - C_8^3 = C_8^4 = 70.$

§ 2. Биномъ Ньютона.

8. Подъ именемъ **„бинома Ньютона"** разумѣютъ формулу, дающую разложеніе цѣлой n'ой степени двучлена $a+x$ по степенямъ x'а.

Непосредственно мы находимъ:

$$(a+x)^2 = a^2 + 2\,ax + x^2,$$
$$(a+x)^3 = a^3 + 3\,a^2x + 3\,ax^2 + x^3,$$
$$(a+x)^4 = a^4 + 4\,a^3x + 6\,a^2x^2 + 4\,ax^3 + x^4,$$

и т. д.;

на основаніи предъидущаго §, можно эти равенства переписать такъ:

$$(a+x)^2 = C_2^0\,a^2 + C_2^1\,ax + C_2^2\,x^2,$$
$$(a+x)^3 = C_3^0\,a^3 + C_3^1\,a^2x + C_3^2\,ax^2 + C_3^3\,x^3,$$
$$(a+x)^4 = C_4^0\,a^4 + C_4^1\,a^3x + C_4^2\,a^2x^2 + C_4^3\,ax^3 + C_4^4\,x^4;$$

разсматривая эти выраженія, замѣчаемъ слѣдующее:

1) показатель буквы x въ какомъ либо членѣ равенъ числу предшествующихъ членовъ и, слѣд., постепенно увеличивается на 1; а показатель буквы a равенъ числу послѣдующихъ членовъ и постепенно уменьшается на 1; при чемъ, слѣд., наименьшій показатель той и другой буквы равенъ нулю, а наибольшій— показателю степени двучлена;

2) сумма показателей обѣихъ буквъ равна показателю степени двучлена;

3) вслѣдствіе двухъ первыхъ свойствъ, число всѣхъ членовъ разложенія на 1 больше показателя степени двучлена;

и 4) коэфиціентъ каждаго члена равенъ числу сочетаній изъ столькихъ элементовъ, каковъ показатель степени двучлена, по столько, сколько членовъ предшествуетъ разсматриваемому.

9. Чтобы быть убѣжденными въ справедливости этихъ законовъ развертыванія степени двучлена, докажемъ, что если они вѣрны для $(a+x)^n$, то будутъ вѣрны и для $(a+x)^{n+1}$.

Допустимъ же, что

$$(a+x)^n = C_n^0\,a^n + C_n^1\,a^{n-1}x + C_n^2\,a^{n-2}x^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^{m-1}\,a^{n-m+1}x^{m-1} + C_n^m\,a^{n-m}x^m +$$
$$+ C_n^{m+1}\,a^{n-m-1}x^{m+1} + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1}\,ax^{n-1} + C_n^n\,x^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

тогда $(a+x)^{n+1} = (a+x)^n (a+x) =$

$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n x + C_n^2 a^{n-1} x^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m+1} x^m +$$

$$+ C_n^0 \qquad + C_n^1 \qquad + \ldots + C_n^{m-1}$$

$$+ C_n^{m+1} a^{n-m} x^{m+1} + \ldots + C_n^n ax^n$$

$$+ C_n^m \qquad + \ldots + C_n^{n-1} \qquad + C_n^n x^{n+1};$$

и такъ какъ $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$,

а $$C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1},$$

то $$(a+x)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n x + C_{n+1}^2 a^{n-1} x^2 \ldots$$

$$+ C_{n+1}^m a^{n+1-m} x^m + C_{n+1}^{m+1} a^{n-m} x^{m+1} + \ldots$$

$$+ C_{n+1}^n ax^n + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$$

разсмотрѣніе этой формулы показываетъ, что она построена по выше выведеннымъ законамъ, изъ чего и заключаемъ, что послѣдніе вѣрны для любой цѣлой и положительной степени двучлена.

Примѣръ. 10-й членъ 14-й степени двучлена $2+x$ равенъ:

$$T_{10} = C_{14}^9 2^6 x^9 = C_{14}^5 2^5 x^9 = \frac{15.14.13.12.11.}{1.2.3.4.5.} 2^5 x^9 = 96096 x^9.$$

10. Свойства „биноміальныхъ коэфиціентовъ“ (такъ называются коэфиціенты въ формулѣ бинома Ньютона).

I. Коэфиціенты членовъ, равно удаленныхъ отъ начала и конца разложенія, равны.

Дѣйствительно, такъ какъ число всѣхъ членовъ въ биномѣ равно $(n+1)$, то $(m+1)$'й членъ отъ его конца имѣетъ $n-m$ раньше себя, а потому его коэфиціентъ равенъ $C_n^{n-m} = C_n^m$ и, слѣд., равенъ коэфиціенту у $(m+n)$'го члена отъ начала разложенія.

II. *До середины разложенія коэфиціенты идутъ увеличиваясь, а далѣе—уменьшаясь.*

Въ самомъ дѣлѣ

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+2)(n-m+1)}{1.2\dots(m-1)\,m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+2)}{1.2.3\dots(m-1)}\cdot\frac{n-m+1}{m} = C_n^{m-1}\frac{n-m+1}{m},$$

откуда и заключаемъ, что коэфиціенты растутъ, пока $\frac{n-m+1}{m} > 1$ или

$$n-m+1 > m, \text{ т. е. } m < \frac{n+1}{2},$$

и убываютъ, когда $\frac{n-m+1}{m} < 1$, т. е. $m > \frac{n+1}{2}$.

III. *Сумма всѣхъ биноміальныхъ коэфиціентовъ равна 2 въ степени показателя бинома.*

Въ этомъ убѣждаемся, положивъ въ равенствѣ (1), что $a=1$ и $x=1$; тогда $(a+x)^n = 2^n$, всѣ же члены правой части равенства (1) обращаются въ свои коэфиціенты.

IV. *Сумма биноміальныхъ коэфиціентовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ, равна суммѣ прочихъ (т. е. стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ).*

Для доказательства стоитъ лишь въ равенствѣ (1) положить $x=1$, $a=-1$; тогда $(a+x)^n=0$, въ правой же части всѣ члены обратятся въ свои коэфиціенты, но поочередно съ знаками $+$ и $-$.

11. Примѣненіе формулы бинома Ньютона къ многочлену совершается послѣдовательно—принятіемъ всѣхъ членовъ, кромѣ одного, за одночленъ.

Примѣръ. $(a+b-c)^3 = [(a+b)-c]^3 = (a+b)^3 - 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 - c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$.

§ 3. Комплексныя величины.

12. Мнимыя числа. Квадратъ всякаго положительнаго или отрицательнаго числа всегда положителенъ; поэтому *корень квадратный изъ отрицательнаго числа не можетъ выразиться никакимъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.* **Условимся** однако *подобные корни разсматривать, какъ* **новый родъ** *чиселъ*, называемыхъ **мнимыми** и **опредѣляемыхъ**

условіемъ, что квадратъ такого числа равенъ соотвѣтствующему подкоренному, такъ что **по опредѣленію** имѣемъ:

$$(\sqrt{-b^2})^2 = -b^2;$$

въ частности $$(\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Такъ какъ $$-b^2 = -1 . b^2 \text{ и } \sqrt{b^2} = b,$$

то для сокращенія письма условимся вмѣсто $\sqrt{-b^2}$ писать $b\sqrt{-1}$, такъ что по опредѣленію же имѣемъ:

$$(b\sqrt{-1})^2 = -b^2.$$

Принято $\sqrt{-1}$ обозначать буквой i, при чемъ это i наз. мнимымъ знакомъ; вводя его, имѣемъ

$$\sqrt{-b^2} = b\sqrt{-1} = bi.$$

13. Комплексныя числа. Положительныя и отрицательныя числа называютъ, въ отличіе отъ мнимыхъ, **вещественными**; а двучленъ, вида

$$a + bi \text{ *)},$$

въ коемъ a и b—вещественны, наз. **комплекснымъ числомъ**. Для объединенія всѣхъ трехъ сортовъ чиселъ **условимся** считать, что комплексное число $a+bi$ обращается въ вещественное число a при $b=o$ и въ „чисто-мнимое" число bi при $a=o$. Въ такомъ случаѣ, устанавливая дальше свойства комплексныхъ чиселъ и правила дѣйствій съ ними, должно это сдѣлать такъ, что бы отсюда, какъ частный случай, вытекала алгебра вещественныхъ чиселъ.

14. Опредѣленіе 1. Комплексное число $a+bi$ равно нулю тогда, и только тогда, когда вещественная его часть a и коэфиціентъ b при мнимомъ знакѣ отдѣльно равны нулю; такимъ образомъ равенство $a+bi=0$
равносильно двумъ такимъ: $a=o$, $b=0$.

Опредѣлене 2. Два комплексныхъ числа считаемъ равными другъ другу тогда, и только тогда, когда соотвѣт-

*) Въ этомъ обозначеніи плюсъ (+) отнюдь не указываетъ на дѣйствіе сложенія, такъ какъ мы пока не имѣемъ никакихъ правилъ дѣйствія надъ мнимыми числами.

ственно равны ихъ вещественныя части и коэфиціенты при мнимомъ знакѣ; значитъ, равенство

$$a+bi=c+di$$

равносильно двумъ слѣдующимъ

$$a=c,\ b=d.$$

15. Сложеніе. Опредѣленіе. Суммою комплексныхъ чиселъ наз. такое новое число, вещественная часть коего есть сумма вещественныхъ частей слагаемыхъ, а коэфиціентъ при i есть сумма такихъ коэфиціентовъ въ слагаемыхъ, такъ что

$$(a+bi)+(c+di)+(e+fi)+\ldots=(a+c+e)+(b+d+f+\ldots)\,i.$$

Слѣдствіе 1. Имѣя въ виду соотвѣтствующія свойства суммъ вещественныхъ чиселъ, можемъ высказать слѣдующія положенія о свойствахъ суммы комплексныхъ чиселъ:

1. величина суммы не зависитъ отъ порядка ея слагаемыхъ;

2. величина суммы не измѣнится отъ замѣны нѣсколькихъ слагаемыхъ ихъ суммою, найденной отдѣльно.

Слѣдствіе 2. Прибавленіе къ равнымъ величинамъ одной и той же третьей величины даетъ величины равныя, ибо

если $\quad a+bi=c+di,$

то $\quad a=c$ и $b=d;$

но $\quad (a+bi)+(e+fi)=(a+e)+(b+f)\,i$

и $\quad (c+di)+(e+fi)=(c+e)+(d+f)\,i;$

и такъ какъ $\quad a+e=c+e$ и $b+f=d+f$

то $\quad (a+e)+(b+f)\,i=(c+e)+(d+f)\,i,$

а слѣд., $\quad (a+bi)+(e+fi)=(c+di)+(e+fi).$

16. Вычитаніе. Опредѣленіе. Разностью двухъ комплексныхъ чиселъ наз. такое новое число, которое въ суммѣ съ вычитаемымъ даетъ уменьшаемое, такъ что если

$$(a+bi)-(c+di)=e+fi,$$

то $\quad (c+di)+(e+fi)=a+bi.$

Слѣдствіе 1. Для вычитанія одного комплекснаго числа изъ другаго надо вычесть отдѣльно вещественныя

части и коэфиціенты примимомъ знакѣ. Дѣйствительно, изъ послѣдняго равенства имѣемъ: $(c+e)+(d+f)i=a+bi$

и, слѣд., $c+e=a,\ d+f=b,$
откуда $e=a-c,\ f=b-d,$
а потому $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

Слѣдствіе 2. Всякій членъ равенства можно переносить изъ одной части въ другую, перемѣнивъ при этомъ его знакъ, ибо если

$$a+bi=(c+di)+(e+fi),$$

то $(a+bi)-(e+fi)=[(c+di)+(e+fi)]-(e+fi)=[(c+e)+(d+f)i]-$
$$-(e+fi)=[(c+e)-e]+[(d+f)-f]i,$$

т. е. $(a+bi)-(e+fi)=c+di.$

17. Умноженіе. Опредѣленіе. Произведеніемъ нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ наз. число, которое получится, когда мы ихъ перемножимъ такъ, какъ будто бы i было простымъ буквеннымъ множителемъ, а затѣмъ i^2 замѣнимъ вездѣ на -1.

Напр., $(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=ac+bci+adi-bd=$
$$=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

Слѣдствіе 1. Изъ свойствъ буквенныхъ произведеній выводимъ слѣдующія заключенія:

1) величина произведенія комплексныхъ чиселъ не зависитъ отъ порядка множителей;

2) величина произведенія не измѣнится отъ замѣны нѣсколькихъ множителей ихъ произведеніемъ, найденнымъ отдѣльно;

3) для умноженія суммы нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ на какое-либо число надо умножить на него каждое изъ слагаемыхъ и сложить всѣ полученныя произведенія;

4) произведеніе суммы на сумму равно суммѣ попарныхъ произведеній членовъ одной суммы на члены другой.

Слѣдствіе 2. Отъ умноженія равныхъ комплексныхъ величинъ на одно и то же комплексное число получаются величины равныя.

Слѣдствіе 3 — значеніе цѣлыхъ степеней числа i: непосредственно имѣемъ:

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2 . i = -i,\ i^4 = i^2 . i^2 = (-1)(-1) = +1,$$

и вообще: $$i^{4k+n} = i^{4k} . i^n = i^{4\,k} . i^n = (+1)^k . i^n = i^n,$$

такъ что $$i^{4k} = +1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

Слѣдствіе 4. Произведеніе любаго числа комплексныхъ множителей приводится всегда къ виду $M + Ni$, ибо
$$(a+bi)(c+di)(e+fi)(g+hi)\ldots = [(a+bi)(c+di)](e+fi)(g+hi)\ldots =$$
$$= (A+Bi)(e+fi)(g+hi)\ldots = [(A+Bi)(e+fi)](g+hi)\ldots$$
$$= (C+Di)(g+hi)\ldots\ldots = M+Ni.$$

Замѣчаніе. Произведеніе комплексныхъ чиселъ можетъ оказаться вещественнымъ—напр.,

$$(3+4i)(6-8i) = 18+24i-24i-32i^2 = 18+32 = 50.$$

Опредѣленіе. Два комплексныхъ числа, различающіяся лишь знакомъ коэфиціента при i, наз. **сопряженными**,—напр.,

$$a+bi \text{ и } a-bi.$$

Теорема. Произведеніе сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ равно суммѣ квадратовъ ихъ вещественной части и коэфиціента при i, а, слѣд., всегда положительно; напр.,

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

18. Дѣленіе. Опредѣленіе. Частнымъ двухъ какихъ-либо чиселъ наз. такое новое число, произведеніе коего на дѣлитель равно дѣлимому.

Теорема 1. Отношеніе Q двухъ чиселъ A и B не измѣнится отъ умноженія дѣлимаго A и дѣлителя B на одно и то же число C.

Дѣйствительно, если $\frac{A}{B} = Q$,
то, по опредѣленію частнаго: $A = BQ$;
слѣд., $AC = (BQ)C$ или $AC = BQC = BCQ = (BC)Q$,
откуда опять, по опредѣленію частнаго:

$$\frac{AC}{BC} = Q, \text{ т. е. } \frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}.$$

Теорема 2. Чтобы комплексное число $a+bi$ раздѣлить на вещественное число N, надо раздѣлить на него отдѣльно вещественную часть и коэфиціентъ при i, ибо

$$\left(\frac{a}{N}+\frac{b}{N}i\right).N=\frac{a}{N}N+\frac{b}{N}N.i=a+bi$$

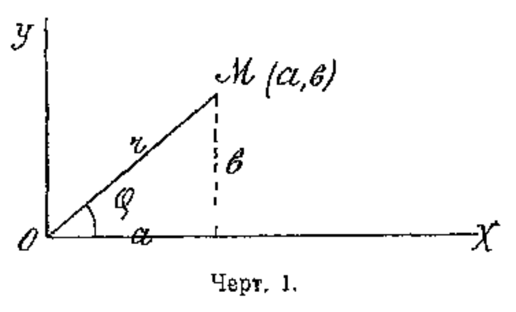
и, слѣд.,

$$\frac{a+bi}{N}=\frac{a}{N}+\frac{b}{N}i.$$

Теорема 3. Отношеніе двухъ комплексныхъ чиселъ всегда приводится къ виду $A+Bi$, для чего надо лишь числитель и знаменатель помножить на число, сопряженное со знаменателемъ, и затѣмъ примѣнить теорему 2-ю. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

19. Геометрическое изображеніе комплексныхъ величинъ. Если, взявъ прямоугольныя оси координатъ, будемъ вещественную часть a всякаго комплекснаго числа трактовать, какъ абсциссу, а коэфиціентъ b при i—какъ ординату, то всякому такому числу будетъ отвѣчать нѣкоторая вполнѣ опредѣленная точка на плоскости, и обратно—всякой точкѣ въ плоскости отвѣчаетъ нѣкоторое единственное комплексное число (въ частности—для точекъ на оси ox— оно можетъ оказаться вещественнымъ); точка $M(a, b)$ наз. аффиксомъ числа $a+bi$. Это геометрическое изображеніе комплексныхъ чиселъ—точками въ плоскости установилъ Гауссъ; если для опредѣленія положенія точки $M(a, b)$ введемъ полярныя координаты r и φ, то будемъ, какъ извѣстно, имѣть:



Черт. 1.

$$a=r.\,\mathrm{Cos}\varphi,\ b=r\,\mathrm{Sin}\varphi \quad \dots\dots\dots (1),$$

откуда обратно: $r^2=a^2+b^2$, т. е. $r=\sqrt{a^2+b^2}$

и $\mathrm{Cos}\varphi=\frac{a}{r}$, $\mathrm{Sin}\varphi=\frac{b}{r}$ $\quad \dots\dots\dots (2).$

Для комплекснаго числа $a+bi$ число r наз. **модулемъ**, а φ —**аргументомъ**; по общему условію **модуль считаютъ непремѣнно положительнымъ**, аргументъ же можетъ быть какимъ угодно, при чемъ

для всякаго числа имѣетъ безчисленное множество значеній, даваемыхъ формулой $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$,
гдѣ φ_0 — младшее значеніе дуги, опредѣляемой равенствами (2), а k — любое цѣлое число.

Примѣръ 1. Для числа $3+2i$ имѣемъ $r=\sqrt{13}$, $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$

и $$\varphi_0 = 33^0 41' 22'',$$

для числа $-2-3i$ имѣемъ тоже $r = \sqrt{13}$, но $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

и $$\varphi_0 = \ \ 33^0 41' 22''$$

Примѣръ 2 Для числа $3-4i$ имѣемъ $r=5$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = -\frac{4}{5}$

и $$\varphi_0 = -53^0 7' 48'',$$

а для числа $-3+4i$ имѣемъ $r=5$, но $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ и $\varphi_0 = 126^0 52' 12''$.

Частные случаи. Модуль положительнаго числа равенъ ему самому, а его аргументъ равенъ нулю, ибо если

$a > o$ и $b = o$, то уравненія (2) даютъ:

$$r = \sqrt{a^2} = a,\ \cos\varphi = \frac{a}{a} = 1,\ \sin\varphi = \frac{o}{a} = o.$$

Модуль отрицательнаго числа равенъ его абсолютной величинѣ, а аргументъ его равенъ π, ибо въ этомъ случаѣ имѣемъ: $a < o$ и $b = o$,
а слѣд., $r = \sqrt{a^2} = -a$, $\cos\varphi = \frac{a}{-a} = -1$ и $\sin\varphi = \frac{o}{-a} = o$.

Модуль чисто мнимаго числа равенъ абсолютной величинѣ его коэфиціента при i, а его аргументъ равенъ $\pm\frac{\pi}{2}$, такъ какъ если $a = o$,

то $$r = \sqrt{b^2} \text{ и } \cos\varphi = o, \text{ а } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{b^2}} = \pm 1,$$

при чемъ ясно, что $$\varphi = +\frac{\pi}{2} \text{ при } b > o$$

и $$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ при } b < o.$$

Замѣчаніе. Модуль числа часто обозначаютъ постановкой его между прямыми вертикальными черточками, такъ что, напр.,

$$|3+8i| = \sqrt{73} \quad \text{и} \quad |-18| = 18.$$

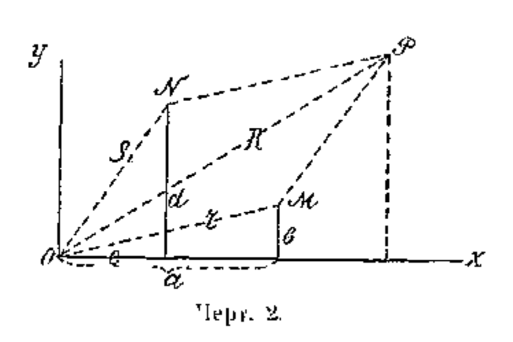
20 Геометрическое значеніе сложенія комплексныхъ величинъ. Пусть M и N суть аффиксы чиселъ $a+bi$ и $c+di$, а P—аффиксъ ихъ суммы

$$(a+bi)+(c+di),$$

равной, какъ мы знаемъ, числу

$$(a+c)+(b+d)i;$$

тогда a и b суть проекціи вектора OM, c и d—проекціи вектора ON, а $a+c$ и $b+d$—проекціи вектора OP, такъ что



Черт. 2.

$Пр_{ox}\, OP = Пр_{ox}\, \bar{O}M + Пр_{ox}\, \bar{O}N$ и $Пр_{oy}\, OP = Пр_{oy}\, OM + Пр_{oy}\, \bar{O}N$.

а слѣд., $$\bar{O}P = \bar{O}M + \bar{O}N,$$

т. е. сложеніе комплексныхъ чиселъ равносильно **геометрическому** сложенію векторовъ, соединяющихъ ихъ аффиксы съ началомъ координатъ, при чемъ ясно, что это справедливо для всякаго числа слагаемыхъ.

Слѣдствіе. Такъ какъ отрѣзокъ прямой всегда короче ломанной, опирающейся на его концы, а модуль всякаго комплекснаго числа какъ разъ представляетъ длину вектора его аффикса, то, слѣд., модуль суммы чиселъ не превышаетъ суммы модулей слагаемыхъ; въ частности, какъ было указано, модуль всякаго вещественнаго числа равенъ его обсолютной величинѣ, а потому абсолютная величина суммы не больше суммы абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ.

21. Тригонометрическое выраженіе комплексныхъ величинъ получимъ, замѣняя въ $a+bi$ числа a и b ихъ выраженіями въ модулѣ и аргументѣ.

$$a = r\ \mathrm{Cos}\varphi,\ b = r\ \mathrm{Sin}\varphi,$$

что дастъ: $$a+bi = r\ \mathrm{Cos}\varphi + r\ \mathrm{Sin}\varphi\,.\,i.$$

обыкновенно это пишутъ такъ:

$$a+bi = r\ (\mathrm{Cos}\varphi + i\,\mathrm{Sin}\varphi).$$

Теорема 1. Для равенства комплекснаго числа нулю необходимо и достаточно равенство нулю его модуля, ибо если $a+bi = o$, то $a = o$ и $b = o$,

а слѣд., и $$r = \sqrt{a^2+b^2} = o;$$

обратно, если $r = o$, т. е. $a^2+b^2 = o$, то $a = o$ и $b = o$,

а потому и $$a+bi = o.$$

Теорема 2. Для равенства двухъ комплексныхъ чиселъ необходимо и достаточно, чтобы ихъ модули были

равны, а аргументы различались лишь на цѣлую кратность числа π.

Дѣйствительно, если $r\,(\mathrm{Cos}\varphi + i\ \mathrm{Sin}\varphi) = \rho\,(\mathrm{Cos}\psi + i\ \mathrm{Sin}\psi)$,
то $$r\ \mathrm{Cos}\varphi = \rho\ \mathrm{Cos}\psi \quad \text{и} \quad r\ \mathrm{Sin}\varphi = \rho\ \mathrm{Sin}\psi;$$
складывая квадраты этихъ равенствъ, получаемъ

$$r^2\,(\mathrm{Cos}^2\varphi + \mathrm{Sin}^2\varphi) = \rho^2\,(\mathrm{Cos}^2\psi + \mathrm{Sin}^2\psi) \text{ или } r^2 = \rho^2$$

и, слѣд., $r = \rho$, а потому $\mathrm{Cos}\varphi = \mathrm{Cos}\psi$ и $\mathrm{Sin}\varphi = \mathrm{Sin}\psi$,
откуда вытекаетъ, что $\varphi = \psi + 2k\pi$,
гдѣ k — любое цѣлое число.

Обратно, изъ равенствъ $r = \rho$ и $\varphi = \psi + 2k\pi$
слѣдуетъ, что $r\ \mathrm{Cos}\varphi = \rho\ \mathrm{Cos}\psi$ и $r\ \mathrm{Sin}\varphi = \rho\ \mathrm{Sin}\psi$,
а потому $r\,(\mathrm{Cos}\varphi + i\,\mathrm{Sin}\varphi) = \rho\,(\mathrm{Cos}\psi + i\,\mathrm{Sin}\psi)$.

22. Умноженіе комплексныхъ чиселъ. Теорема. Модуль произведенія равенъ произведенію модулей множителей, а аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ множителей.

Дѣйствительно имѣемъ.

$$[r_1\,(\mathrm{Cos}\varphi_1 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_1)]\ [r_2\,(\mathrm{Cos}\varphi_2 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_2)] = r_1\,r_2\ (\mathrm{Cos}\varphi_1 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_1)\cdot$$
$$\cdot(\mathrm{Cos}\varphi_2 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_2) = r_1\ r_2\,(\mathrm{Cos}\varphi_1\ \mathrm{Cos}\varphi_2 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_1\ \mathrm{Cos}\varphi_2 + i\ \mathrm{Cos}\varphi_1\ \mathrm{Sin}\varphi_2 +$$
$$+ i^2\ \mathrm{Sin}\varphi_1\ \mathrm{Sin}\varphi_2) = r_1\ r_2\ [(\mathrm{Cos}\varphi_1\ \mathrm{Cos}\varphi_2 - \mathrm{Sin}\varphi_1\ \mathrm{Sin}\varphi_2) + i\ (\mathrm{Sin}\varphi_1\ \mathrm{Cos}\varphi_2 +$$
$$+ \mathrm{Cos}\varphi_1\ \mathrm{Sin}\varphi_2)] = (r_1\ r_2)\cdot[\mathrm{Cos}\ (\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \mathrm{Sin}\ (\varphi_1 + \varphi_2)],$$

при чемъ здѣсь модуль есть, очевидно, $r_1\ r_2$, а аргументъ равенъ $\varphi_1 + \varphi_2$; поэтому

$$r_1\ (\mathrm{Cos}\varphi_1 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_1).\ r_2\ (\mathrm{Cos}\varphi_2 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_2).\ r_3\ (\mathrm{Cos}\varphi_3 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_3)\ldots.$$
$$\cdot\, r_n\ (\mathrm{Cos}\varphi_n + i\ \mathrm{Sin}\varphi_n) = [r_1\ (\mathrm{Cos}\varphi_1 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_1).\ r_2\ (\mathrm{Cos}\varphi_2 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_2)].$$
$$.\,r_3\,(\mathrm{Cos}\varphi_3 + i\,\mathrm{Sin}\varphi_3)\ldots r_n\,(\mathrm{Cos}\varphi_n + i\,\mathrm{Sin}\varphi_n) = [(r_1\ r_2).\ [\mathrm{Cos}\,(\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_1 +$$
$$+ \varphi_2)].\ r_3\ (\mathrm{Cos}\varphi_3 + i\ \mathrm{Sin}\varphi_3)\}\ldots r_n\ (\mathrm{Cos}\varphi_n + i\,\mathrm{Sin}\varphi_n) = r_1\ r_2\ r_3\ [\mathrm{Cos}\,(\varphi_1 +$$
$$+ \varphi_2 + \varphi_3) + i\ \mathrm{Sin}\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)]\ldots\ r_n\ (\mathrm{Cos}\varphi_n + i\ \mathrm{Sin}\varphi_n)\ldots\ =$$
$$= r_1\ r_2\ldots r_n.[\mathrm{Cos}\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\ \mathrm{Sin}\ (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)].$$

Слѣдствіе. Что бы произведеніе комплексныхъ чиселъ равнялось нулю необходимо и достаточно равенство нулю хоть одного изъ множителей, ибо для этого необходимо и достаточно равенство

$$r_1\ r_2\ldots r_n = 0,$$

для коего въ свою очередь необходимо и достаточно, что бы, напр.,
$$r_k = 0,$$
т. е. чтобы $$r_k\,(\mathrm{Cos}\varphi_k + i\ \mathrm{Sin}\varphi_k) = 0.$$

23. Формула Моавра. Полагая въ предъидущей теоремѣ, что

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r \text{ и } \varphi_1 = \ldots = \varphi_n = \varphi,$$

получимъ: $[r(\text{Cos}\varphi + i\ \text{Sin}\varphi)]^n = r^n [\text{Cos}\ n\varphi + i\ \text{Sin}\ n\varphi]$;

это равенство и наз. формулой Моавра. Оно показываетъ, что модуль цѣлой n'ой степени комплекснаго числа равенъ той же степени модуля этого числа, а аргументъ этой степени равенъ n—кратному аргументу основанія степени, при чемъ эта теорема справедлива и для цѣлаго отрицательнаго показателя; дѣйствительно, полагая $n = -m$, гдѣ уже $m > 0$, имѣемъ:

$$[r(\text{Cos}\varphi + i\ \text{Sin}\varphi)]^n = [r(\text{Cos}\varphi + i\ \text{Sin}\varphi)]^{-m} = \frac{1}{[r(\text{Cos}\varphi + i\ \text{Sin}\varphi)]^m} =$$

$$= \frac{1}{r^m(\text{Cos}\ m\varphi + i\ \text{Sin}\ m\varphi)} = \frac{1}{r^m} \cdot \frac{\text{Cos}\ 0 + i\ \text{Sin}\ 0}{\text{Cos}\ m\varphi + i\ \text{Sin}\ m\varphi} =$$

$$= r^{-m}[\text{Cos}\ (-m\varphi) + i\ \text{Sin}\ (-m\varphi)]$$

$$= r^n(\text{Cos}\ n\varphi + i\ \text{Sin}\ n\varphi).$$

24. Дѣленіе комплексныхъ чиселъ.

Теорема. Модуль отношенія равенъ отношенію модулей, а аргументъ его равенъ разности аргументовъ числителя и знаменателя.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $\frac{r(\text{Cos}\varphi + i\ \text{Sin}\varphi)}{\rho(\text{Cos}\psi + i\ \text{Sin}\psi)} = R(\text{Cos}\omega + i\ \text{Sin}\omega)$,

имѣемъ: $r(\text{Cos}\varphi + i\ \text{Sin}\varphi) = \rho(\text{Cos}\psi + i\ \text{Sin}\psi) \cdot R(\text{Cos}\omega + i\ \text{Sin}\omega) =$

$$= \rho R\,[\text{Cos}\ (\psi + \omega) + i\ \text{Sin}\ (\psi + \omega)],$$

а слѣд., $r = \rho R$ и $\varphi = \psi + \omega$,

откуда $R = \frac{r}{\rho}$ и $\omega = \varphi - \psi$.

ГЛАВА II.

Функціи.

§ 1 Постоянныя и перемѣнныя числа Понятіе о функціяхъ и ихъ классификація.

25. Величины, разсматриваемыя въ какомъ-либо вопросѣ, могутъ либо оставаться всегда неизмѣнными, либо, наоборотъ, мѣняться; первыя наз. **постоянными** -таковы, напр., радіусъ даннаго круга, произведеніе отрѣзковъ хордъ даннаго круга проводимыхъ черезъ данную точку; вторыя наз. **перемѣнными**—таковы: радіусъ окружности, вписанной въ данной уголъ; длина хорды даннаго круга, проходящей черезъ данную точку и т. д. Изъ этихъ примѣровъ, между прочимъ, видно, что величина, постоянная въ одномъ вопросѣ, можетъ быть перемѣнною въ другомъ, какъ, напр., выше—радіусъ окружности.

По обще-принятому обыкновенію постоянныя величины обозначаютъ начальными буквами латинскаго алфавита a, b, c,..., а перемѣнныя—послѣдними: t, x, y, z,... либо буквами греческаго алфавита: α, β, γ,...

26. Изученіе какой-либо величины съ помощью математическихъ методовъ возможно только тогда, когда она выражена числомъ (для чего надо каждый разъ выбрать единицу мѣры и способъ измѣренія). Всякому извѣстны раціональныя—цѣлыя и дробныя—числа; извѣстно также, что существуютъ числа ирраціональныя—какъ, напр., число, выражающее длину діагонали квадрата, когда его сторона взята за единицу длинъ. Мы примемъ за **очевидную истину**, что всякая величина можетъ быть выражена въ однородной съ нею нѣкоторымъ числомъ раціональнымъ или ирраціональнымъ; напр., если точка M движется по прямой, то при каждомъ ея положеніи разстояніе ея до опредѣленной точки O этой прямой выражается нѣкоторымъ числомъ при всякой единицѣ длины. При этомъ число x считается равнымъ или большимъ числа y, когда величина, измѣряемая числомъ x, соотвѣтственно равна или больше однородной съ нею величины, измѣряемой числомъ y.

27. Совокупность **всѣхъ** чиселъ, заключающихся между числами a и A либо равныхъ одному изъ нихъ, наз. **промежуткомъ (участкомъ)** (a и A). Про каждое изъ нихъ говорятъ, что оно принадлежитъ этому промежутку, а послѣдній ихъ содержитъ; при этомъ, если напр., $a < A$, то a наз. **низшей**, а A **высшей границей** промежутка, разность же $A-a$ наз. его **протяженіемъ** или **длиной**. Наконецъ, если

$$a \leqslant b < B \leqslant A,$$

то говорятъ, что промежутокъ (b, B) заключается въ промежуткѣ (a, A).

Введя эти названія, говорятъ еще, что перемѣнное число x мѣняется на участкѣ (a, A), когда оно можетъ принять любое изъ значеній, принадлежащихъ этому участку (a, A).

28. Опредѣленіе 1. Перемѣнное число, значенія котораго мы можемъ задавать по произволу, наз. **аргументомъ** или **независимымъ**. Обыкновенно, говоря объ измѣненіи независимаго перемѣннаго на участкѣ (a, A), считаютъ, что при этомъ оно все время растетъ, (либо все время убываетъ) и, слѣд., проходитъ черезъ различныя числа этого участка послѣдовательно въ порядкѣ постепенности ихъ возрастанія (либо убыванія) и черезъ каждое лишь по одному разу; подобное измѣненіе независимаго перемѣннаго наз. **непрерывнымъ** или **сплошнымъ**.

29. Опредѣленіе 2. Функціей независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z,... наз. такая **перемѣнная величина**, значенія коей не могутъ быть задаваемы по произволу, такъ какъ они опредѣляются уже заданіемъ значеній этихъ независимыхъ; часто функціею наз. еще **перемѣнной зависящей.** Напр., площадь круга и длина его окружности суть функціи его радіуса; объемъ параллелопипеда есть функція его измѣреній...

30. Опредѣленіе 3. Задать функцію—значитъ указать способъ опредѣлить ея значеніе, отвѣчающее той или другой **допустимой** совокупности значеній аргументовъ; способовъ заданія функціи—безчисленное множество; мы пока укажемъ лишь три простѣйшихъ.

1. Заданіе таблицей—напр., въ элементарной алгебрѣ такъ введены въ обиходъ логарифмы;

2. Заданіе графически—этотъ способъ примѣняется напр., въ тригонометріи при введеніи понятій о *Sin*, *Cos* и т. д.

и 3) Заданіе уравненіемъ, связывающимъ величины аргументовъ съ соотвѣтствующей имъ величиной функціи.

Частный случай послѣдняго заданія представляетъ такъ наз. заданіе формулой, указывающей математическія дѣйствія, которыя надо совершить надъ аргументами, чтобы вычислить значеніе функціи. Очевидно, что отъ заданія уравненіемъ мы перейдемъ къ заданію формулой, если рѣшимъ это уравненіе; напр., функція y, опредѣляемая ур—ніемъ

$$(2x+3)\,y^2-4x^2y+x^3-2x+1=0,$$

выразится слѣдующей формулой:

$$y=\frac{2x^2\pm\sqrt{2x^4-3x^3+4x^2+4x-3}}{2x+3}.$$

Каждый изъ вышеупомянутыхъ способовъ заданія функціи имѣетъ свои выгоды: напр., заданіе таблицей весьма удобно для практическихъ примѣненій; заданіе графикомъ указываетъ наглядно постепенное измѣненіе функціи; а за то лишь заданіе уравненіемъ или формулой позволяетъ подвергнуть функцію дальнѣйшимъ математическимъ изслѣдованіямъ.

31. Послѣднее обстоятельство настолько существенно, что даже тогда, когда неизвѣстенъ характеръ зависимости функціи w отъ аргументовъ x, y, z,..., а извѣстенъ лишь фактъ существованія нѣкоторой зависимости, примѣняютъ послѣдній изъ вышеуказанныхъ способовъ заданія - именно пишутъ:

$$w=f\,(x,\ y,\ z,\ldots),$$

при чемъ буква f (начальная буква слова „*fonction*"—функція) наз. **характеристикой** функціи. Съ измѣненіемъ характера зависимости надо замѣнить букву f какой либо другой (обыкновенно созвучной съ ней)—напр., F, Φ, Ψ, Θ и т. д.; такимъ образомъ

$$\varphi\,(x,\ y,\ z,\ldots)$$

есть новая функція, но зависящая отъ прежнихъ аргументовъ; а

$$f\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots)$$

есть функція, зависящая отъ новыхъ аргументовъ $\alpha, \beta, \gamma,\ldots$ такъ, какъ w зависитъ отъ x, y, z,...

Замѣтимъ еще, что частное значеніе w при частныхъ значеніяхъ a, b, c,... аргументовъ обозначаютъ такъ:

$$f\,(x,\ y,\ z,\ldots)_{\substack{x=a\\ y=b\\ \ldots}}$$

или еще—для краткости—такъ:

$$f\,(a,\ b,\ c,\ldots).$$

32. Опредѣленіе 4. Областью перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ наз. совокупность значеній ихъ, выбираемыхъ **произвольно** для x на участкѣ (a, A), для y—на участкѣ (b, B), и т. д.

Опредѣленіе 5. Функція $f(x, y, z, \ldots)$ наз. **опредѣленной въ нѣкоторой области**, если она имѣетъ одно или нѣсколько опредѣленныхъ значеній для **каждой** системы величинъ x, y, z, принадлежащихъ помянутой области; напр., если не хотимъ вводить мнимыхъ величинъ, то функція

$$x^2 \lg y + y\sqrt{1 - x^2}$$

опредѣлена на участкѣ $(-1, +1)$ для x и на участкѣ (α, A) для y, при чемъ α—сколь угодно малое, а A—сколь угодно большое положительныя числа; а функція $\frac{1}{x}$ опредѣлена на совокупности участковъ $(-A, -\alpha)$ и (α, A), ибо при $x = o$ получаемъ не имѣющее для насъ смысла выраженіе $\frac{1}{o}$.

Мы ограничимся дальше изученіемъ именно лишь функцій, опредѣленныхъ въ какой-либо области.

33 Классификація функцій. Для удобства рѣчи въ дальнѣйшемъ полезно установить дѣленіе функцій на классы.

Функція w, значенія коей могутъ быть связаны съ значеніями аргументовъ x, y, z, уравненіемъ, въ которомъ надъ w и $x, y, z, \ldots$ совершаются лишь дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и возвышенія въ цѣлую степень, наз. **алгебрической**; такова, напр. функція, опредѣляемая ур—ніемъ:

$$\frac{x^2 w}{y} + \frac{z}{3} w^2 - \frac{\lg 5}{w - 4x} = o.$$

Можно доказать, что такая функція можетъ имѣть лишь конечное число значеній для каждой допустимой совокупности значеній аргументовъ; а слѣд., всякая функція, имѣющая безчисленное множество значеній, навѣрное не алгебрическая—такова, напр., дуга, опредѣляемая по ея Sin'у или Cos'у и т. п.

Неалгебрическія функціи наз. **трансцендентными**; къ нимъ принадлежать, между прочимъ, степени съ несоизмѣримыми показателями, показательныя функціи съ постояннымъ и съ перемѣннымъ основаніемъ (напр., a^x и y^x), затѣмъ функціи, содержащія аргументы подъ знакомъ логарифма; тригонометрическія функціи и, наконецъ, такъ наз. круговыя (объ нихъ подробно будетъ рѣчь дальше).

Алгебраическія функціи въ свою очередь дѣлятся на разряды. Именно, если можно рѣшить ур—ніе, опредѣляющее w, и такимъ образомъ выразить w въ зависимости отъ $x, y, z, \ldots$ формулой, въ которой надъ аргументами $x, y, z, \ldots$ совершаются лишь дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и возвышенія въ цѣлую степень, то w наз. **раціональной** функціей, при чемъ она наз. еще **цѣлой**, когда въ ея выраженіе не входитъ дѣленіе на аргументы; (очевидно, все это будетъ тогда, когда первоначальное ур—ніе—линейно, т. е. 1-ой степени относительно w).

Если изъ аргументовъ извлекаются корни, то функція наз. **радикальной**; а если мы не можемъ рѣшить ур—ніе, опредѣляющее w, то алгебрическая функція w наз. **ирраціональной**.

Въ частности, одночленъ, содержащій аргументы лишь въ раціональныхъ степеняхъ, наз. **степенной** функціей.

Замѣтимъ между прочимъ, что цѣлая функція опредѣлена, очевидно, при всякихъ значеніяхъ аргументовъ, дробная-же—за исключеніемъ тѣхъ, при которыхъ знаменатели обращаются въ нули.

Примѣры:

1) 3^x . . . трансцендентная функція (показательная, съ постояннымъ основаніемъ).

2) $4x \, Sin y$ . . . тоже

3) $\frac{lg x}{y}$ . . . тоже.

4) $x^{\sqrt{z}}$ . . . тоже

5) $x^2 w + y w^5 - 1 = 0$ . . . w — алгебрическая ирраціональная функція;

6) $x^2 w + y w^4 - 1 = 0$ . . . w — радикальная функція, ибо всякое ур—ніе 4-ой степени можно рѣшить.

7) $x^2 y + \sqrt{x} \, lg 2$ . . . радикальная функція.

8) $\frac{x y^2 - z^3}{2 \sqrt[3]{y} + x z}$ . . . раціональная дробная функція

9) $\frac{x}{3} + y^2 \, Sin \, 42^0$ . . . цѣлая функція.

34. Если для каждой совокупности значеній аргументовъ сама функція имѣетъ лишь одно значеніе, то она наз. однозначной (uniforme)—таковы, напр., $x^2 + 2y$, $Sin \, 2x - \frac{1}{y}$ и т. п.; въ противномъ же случаѣ она наз. многозначной—таковы: $\sqrt{xy}$; дуга окружности, опредѣляемая по ея $Sin' y$ или $Cos' y$, и т. д.

Ясно, что изученіе однозначныхъ функцій вести гораздо удобнѣе; поэтому сводятъ многозначныя функціи на однозначныя, разсматривая совмѣстно лишь послѣдовательныя величины какого либо одного изъ значеній функціи. такъ напр., двузначную функцію $\sqrt{xy}$ можно изучать, какъ совокупность двухъ однозначныхъ функцій:

$$+\sqrt{xy} \text{ и } -\sqrt{xy}$$

Мы дальше всегда будемъ имѣть въ виду лишь однозначныя функціи и потому, между прочимъ, у всякой степени будемъ разсматривать лишь ея **положительное** значеніе, при чемъ, во избѣжаніе мнимости, и основаніе степени всегда будемъ брать лишь положительное.

Если измѣненіе знака аргумента не мѣняетъ ни величины, ни знака функціи, т. е. если

$$f(-x) \equiv f(x)\ ^{*)},$$

то она наз. **четной**—таковы, напр.,

$$2x^2+x^4 \text{ и } \operatorname{Cos} x;$$

а если измѣненіе знака аргумента мѣняетъ **лишь знакъ** функціи, не мѣняя ея абсолютной величины, т. е. если

$$\underline{f(-x) \equiv -f(x)},$$

то она наз. нечетной—таковы $x+\frac{1}{x^3}\operatorname{Sin} x$, $tg\, 2x$.

Теорема. Функція, не относящаяся ни къ четнымъ, ни къ нечетнымъ, есть сумма двухъ другихъ, изъ коихъ одна—четная, а другая—нечетная.

Дѣйствительно:

$$f(x) \equiv \frac{f(x)+f(x)}{2} \equiv \frac{f(x)+f(-x)-f(-x)+f(x)}{2} \equiv \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2};$$

и ясно, что первое слагаемое есть функція четная, а второе—нечетная.

Примѣръ. $\sqrt[3]{x^3+1} = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{-x^3+1}}{2} + \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{-x^3+1}}{2}.$

35. Функціи прямыя и обратныя. Предположимъ, что y есть однозначная функція x'а:

$$y = f(x),$$

*) Знакъ $\equiv$ ставятъ для обозначенія тожественнаго равенства.

такъ что значеніямъ $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ послѣдняго отвѣчаютъ значенія $y_1, y_2, \ldots y_m, \ldots$ перваго; тогда обратно, напр., при $y = y_m$ перемѣнное x можетъ имѣть лишь значеніе x_m, такъ что, задавая величину y'а, мы тѣмъ самымъ опредѣляемъ величину x'а, т. е. x является въ свою очередь функціей y'а—напр.,

$$x = \varphi(y).$$

Эта функція наз. **обратною** той, которую представляетъ y по отношенію къ x'у, послѣдняя же наз. **прямой**; очевидно, что понятія о прямой и обратной функціи относительны — все зависитъ отъ того, съ которой изъ нихъ мы начали разсмотрѣніе.

Теорема. Прямая и обратная функціи одновременно алгебричны или трансцендентны.

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію—если y есть алгебрическая функція x'а, то x и y связаны ур—ніемъ

$$F(x, y) = 0,$$

лѣвая часть коего есть цѣлый многочленъ относительно какъ x, такъ и y; а это значитъ, что и x есть алгебрическая функція y'а; и обратно. Отсюда заключаемъ, что если y трансцендента относительно x, то x не можетъ быть алгебрично относительно y; и обратно.

Слѣдствіе. Если одна изъ двухъ обратныхъ другъ другу функцій имѣетъ безчисленное множество значеній для каждой величины ея аргумента, то обѣ онѣ трансцендентны. Таковы, напр., всѣ тригонометрическія функціи, ибо каждому допустимому *Sin*'у, каждому *Cos*'у и т. д. отвѣчаетъ безчисленное множество дугъ.

36. Что бы покончить съ классификаціей функцій, замѣтимъ еще слѣдующее.

Функція наз. **явной**, когда она задана формулой, и **неявной**, когда для полученія явнаго ея выраженія въ аргументахъ надо рѣшить опредѣляющее ее ур—ніе.

Функція наз. **возростающей**, когда съ увеличеніемъ аргумента, растетъ и она сама; и **убывающей**, когда она уменьшается при увеличеніи аргумента. Очевидно, что въ первомъ случаѣ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$, слѣд., и $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} > 0$, во второмъ же $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$, а слѣд., и $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} < 0$; значитъ, прямая и обратная функціи всегда либо одновременно обѣ—возростающія, либо обѣ—убывающія.

Наконецъ, если функція получаетъ одну и ту же величину каждый разъ, какъ аргументъ измѣнится на одно и то же постоянное количество ω, т. е. если

$$f(x+n\,\omega) = f(x),$$

когда n — число цѣлое, то она наз. **періодической**, а число ω наз. ея **періодомъ**; таковы, напр., всѣ тригонометрическія функціи, причемъ для $Sinx$, $Cosx$, $Secx$ и $Cosecx$ періодъ, какъ извѣстно, равенъ 2π, а для tgx и $Cotgx$ онъ равенъ π.

§ 2. Круговыя функціи.

37. Прежде всего замѣтимъ, что въ математическомъ анализѣ выражаютъ дуги окружности не въ градусахъ, а въ такъ наз. **радіанахъ**, т. е. за единицу дугъ принимаютъ дугу, длина коей равна ея радіусу; угловая величина радіана равна $57^0\,17'\,44{,}81''$...

Переходъ отъ градусовъ къ радіанамъ и обратно совершается весьма просто; именно, если длина дуги въ n^0 есть x, то имѣемъ:

$$\frac{n^0}{180^0} = \frac{x}{\pi},$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{180^0}\cdot n^0$$

и обратно

$$n^0 = \frac{180^0}{\pi}\cdot x$$

Кромѣ того, во всякой таблицѣ логарифмовъ имѣется страница, служащая для перевода дугъ изъ одной мѣры въ другую: въ ней указаны значенія числа x, отвѣчающія дугамъ въ 1^0, 2^0, ..180^0, затѣмъ въ $1'$, $2'$,...$60'$ и, наконецъ, въ $1''$, $2''$,...$60''$.

Замѣтимъ еще, что въ анализѣ не ограничиваютъ разсматриваемыя дуги предѣлами 0^0 и 360^0 или, иначе, 0 и 2π, а допускаютъ для нихъ всякія и при томъ, какъ положительныя, такъ и отрицательныя величины, при чемъ графически положительныя дуги отсчитываютъ обратно ходу часовой стрѣлки, а отрицательныя — по нему

Примѣръ 1. Выразить дугу въ $194^\circ\,53'\,12{,}1''$ въ радіанахъ

По таблицѣ имѣемъ:

360°	равно	6,283 1854
134°	„	2,338 7412
53′	„	0,015 4171
12″	„	0,000 0582
0.11″	„	0,000 0020
слѣд., x	=	8,637 4039

Примѣръ 2. Найти $tg\ (\mathrm{Sin}^2\ 32°)$.

Имѣемъ $lg\ \mathrm{Sin}\ 32° = 9{,}724\ 2097$, $2\ lg\ \mathrm{Sin}\ 32° = 9{,}448\ 4194$

$\mathrm{Sin}^2\ 32 = 0{,}280\ 8144$

по таблицѣ

дугѣ	0.279 2527	отвѣчаетъ	16°
остатокъ	0,001 5617		
дугѣ	0,001 4544	„	5′
остатокъ	0,000 1073		
дугѣ	0,000 0067	„	22″
остатокъ	0,000 0006		
дугѣ	0.000 000 582	„	0.12″

Слѣд., дугѣ $(\mathrm{Sin}^2\ 32°)$ отвѣчаетъ 16° 5′ 22, 12″,

поэтому $lgtg\ (\mathrm{Sin}^2\ 32°) = 9{,}460\ 0498$; $tg\ (\mathrm{Sin}^2\ 32°) = 0{,}288\ 4362$.

38. Опредѣленіе. Круговой функціей наз. дуга, опредѣленная какою либо изъ ея тригонометрическихъ величинъ.

Такихъ функцій шесть; именно:

арксинусъ x'а есть дуга, Sin коей равенъ x;
арккосинусъ x'а „ „ Cos „ „ x;

и подобнымъ же образомъ вводятся функціи: **арктангенсъ, арккотангенсъ, арксекансъ и арккосекансъ.**

Такъ какъ, одинъ и тотъ же Sin, или одинъ и тотъ же Cos, и т. д. принадлежитъ безчисленному множеству дугъ, при чемъ всѣ ихъ легко найти, когда извѣстна одна изъ нихъ, то ввели еще понятіе о такъ наз. **младшемъ значеніи** круговой функціи, подъ коимъ разумѣютъ наименьшее по абсолютной величинѣ изъ всѣхъ ея значеній, а если такихъ будетъ два различающихся, слѣд., знакомъ, то младшимъ наз. то изъ нихъ, которое положительно.

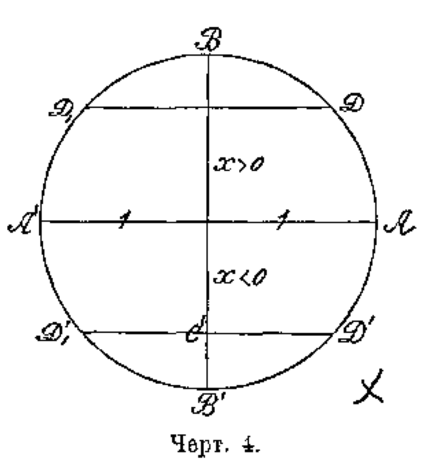
Любыя и младшія значенія круговыхъ функцій будемъ обозначать такъ:

любыя:	младшія:
$\mathrm{arcsin}x$	$\mathrm{Arcsin}x$
$\mathrm{arccos}x$	$\mathrm{Arccos}x$
$\mathrm{arctg}x$	$\mathrm{Arctg}x$,

и т. д.

Вспоминая тригонометрію, легко видѣть, что arcsin x и arccos x опредѣлены на участкѣ $(-1,+1)$, arctg x и asccotg x опредѣлены на участкѣ $(-\infty,+\infty)$ и arcsec x и arccosec x опредѣлены на совокупности участковъ $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$.

Найдемъ теперь прежде всего младшее значеніе каждой круговой функціи и выраженіе съ помощью него всѣхъ прочихъ ея значеній.



Черт. 4.

39. Arcsin. Пусть x — положительное число, не превышающее 1. Отложимъ его вверхъ по вертикальному діаметру окружности радіуса, равнаго 1, до точки C и проведемъ черезъ нее горизонтальную хорду D_1D; тогда ясно, что дуги AD и AD_1, а также всѣ, отличающіяся отъ нихъ на цѣлое число k окружностей, т. е. на $2k\pi$, имѣютъ Sin, равный x, такъ что
$$\arcsin x = \begin{cases} \smile AD + 2k\pi \\ \smile AD_1 + 2k\pi. \end{cases}$$

Но если $k > 0$, то всѣ эти дуги будутъ длиннѣе дугъ AD и AD_1; затѣмъ $\smile AD - 2\pi = \smile AB'D$, а $\smile AD_1 - 2\pi = \smile AB'D_1$, а эти дуги соотвѣтственно длиннѣе, чѣмъ $\smile AD$ и $\smile AD_1$; наконецъ, при $k < -1$ и подавно получимъ болѣе длинныя дуги, а такъ какъ еще $\smile AD < \smile AD_1$, то, значитъ, Arcsin $x = \smile AD$,

при чемъ
$$\arcsin x = \begin{Bmatrix} 2k\pi + \mathrm{Arcsin}x \\ 2k\pi + \pi - \mathrm{Arcsin}x \end{Bmatrix} \ldots\ldots \quad (1),$$

ибо $\smile AD_1 = \smile ABA' - \smile D'A = \smile ABA' - \smile AD = \pi - \mathrm{Arcsin}x$; оба послѣднихъ выраженія можемъ соединить, очевидно, въ одно:

$$\mathbf{arcsin\,x = m\pi + (-1)^m\ Arcsin\,x} \ldots\ldots \quad (2).$$

Пусть теперь $x < 0$, но по абсолютной величинѣ не превышаетъ 1. Тогда, откладывая его по вертикальному діаметру внизъ до точки C' и заканчивая построеніе подобно предъидущему, видимъ что

$$\arcsin x = \begin{cases} \smile AD' + 2k\pi \\ \smile AD_1' + 2k\pi \end{cases}$$

и, разсуждая совершенно такъ же, какъ выше, заключимъ, что теперь

$$\mathrm{Arcsin}x = \smile AD'.$$

при чемъ равенства (1) и (2) остаются справедливы, такъ какъ

$$\smile AD'_1 = \smile AB'A' + \smile A'D_1 = -\pi - \smile AD' = -\pi - \text{Arcsin}x$$

и, слѣд., $\smile AD_1' + 2k\pi = 2k\pi - \pi - \text{Arcsin}x = 2(k-1)\pi + \pi - \text{Arcsin}x =$
$= 2k'\pi + \pi - \text{Arcsin}x$.

Итакъ, младшій $\text{Arcsin}\,x$ находится въ 1-й положительной четверти при $x > 0$ и въ 1-й отрицательной—при $x < 0$, т. е. мѣняется отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, всѣ же прочія значенія $\text{arcsin}x$ опредѣляются формулой (2).

Предполагая еще, что $\overline{OC'} = -OC$, видимъ, что $\smile AD' = -\smile AD$, т. е.
$$\textbf{Arcsin}\ (-x) = -\textbf{Arcsin}\ x,$$
а слѣд. $\text{Arcsin}x$ есть функція нечетная.

40. Arccosecx. Такъ какъ $\text{Cosec}\alpha = \frac{1}{\text{Sin}\alpha}$,

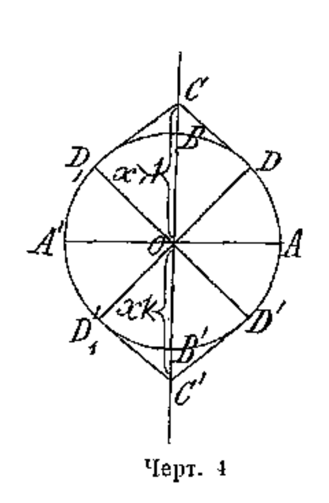
откуда обратно $$\text{Sin}\alpha = \frac{1}{\text{cosec}\alpha},$$

то, слѣд., дуга, косекансъ коей равенъ x, имѣетъ Sin, равный, $\frac{1}{x}$,

иначе говоря $$\text{arccosec}x = \text{arcsin}\ \frac{1}{x}$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\text{Arccosec}x = \text{Arcsin}\ \frac{1}{x} \quad . \quad . \qquad (3),$$



Черт. 4

и, слѣд., младшій $\text{Arccosec}x$ заключается въ 1-й положительной четверти при $x \geqslant 1$ и въ 1-ой отрицательной—при $x \leqslant 1$, при чемъ представляетъ функцію нечетную, т. е.
$$\textbf{Arccosec}\,(-x) = -\textbf{Arccosec}x;$$
кромѣ того
$$\textbf{arccosec}x = m\pi + (-1)^m\ \textbf{Arccosec}x \quad . \ . \ . \quad (4).$$

Что касается графическаго построенія $\text{arccosec}x$ по данному x'у, то оно ясно изъ черт. 4-го.

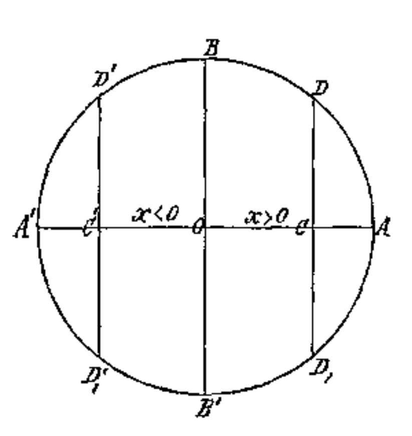
41. Arccosx. Сдѣлавъ построенія, указанныя на черт. 6-мъ, гдѣ $OC = x$, видимъ, что,

$$\text{arccos}x = \begin{cases} \smile AD + 2k\pi \\ \smile AD_1 + 2k\pi \end{cases};$$

изъ всѣхъ такихъ дугъ самыми короткими будутъ, очевидно, $\smile AD$ и $\smile AD_1$; и такъ какъ $\smile AD_1 = -\smile AD$, то, значитъ,
$$\text{Arccos}x = \smile AD.$$

и $\operatorname{arccos} x = 2k\pi \pm \operatorname{Arccos} x$ . . . . (5).

При этомъ если $x > 0$, то точка D будетъ вправо отъ вертикальнаго діаметра, а когда $x < 0$, то влѣво; значитъ, младшій $\operatorname{Arccos} x$ лежитъ въ 1-ой положительной четверти при $x > 0$ и во **2-ой положительной** — при $x < 0$.



Черт. 5.

Предполагая еще, что $OC' = -OC$, видимъ, что $\smile A'D' = \smile AD$, а слѣд.,

$$\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x,$$

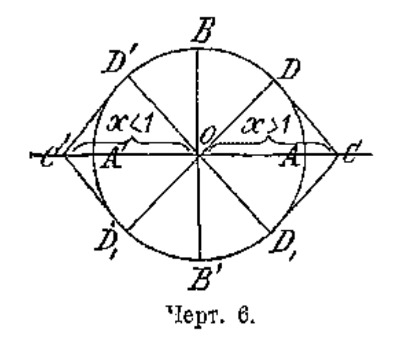
такъ что $\operatorname{Arccos} x$ не есть ни четная, ни нечетная функція.

42. Arcsecx. Замѣчая, что $\operatorname{Sec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha}$,

откуда обратно $\operatorname{Cos}\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$,

заключаемъ, что $\operatorname{arcsec} x = \arccos\frac{1}{x}$

и, слѣд., $\operatorname{Arcsec} x = \operatorname{Arccos}\frac{1}{x}$ . . . . . . (6)



Черт. 6.

а потому младшій $\operatorname{Arcsec} x$ принадлежитъ 1-ой положительной четверти при $x \geqslant 1$ и **2-ой положительной** — при $x \leqslant 1$, при чемъ еще

$$\operatorname{Arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{Arcsec} x,$$

такъ что эта функція — ни четная, ни нечетная; кромѣ того

$$\operatorname{arcsec} x = 2k\pi \pm \operatorname{Arcsec} x; \quad \ldots \quad (7),$$

построенія же $\operatorname{arcsec} x$ по данному x ясны изъ черт. 6 го.

43. Arctgx. Изъ черт. 7-го видно, что если $x > 0$, то

$$\operatorname{arctg} x = \smile AD + k\pi,$$

при чемъ: когда $k > 0$, то всѣ эти дуги длиннѣе дуги AD; затѣмъ $\smile AD - \pi = \smile AB'D_1$, которая тоже длиннѣе, чѣмъ $\smile AD$; и, наконецъ, при $k < -1$ получаются дуги еще длиннѣе;

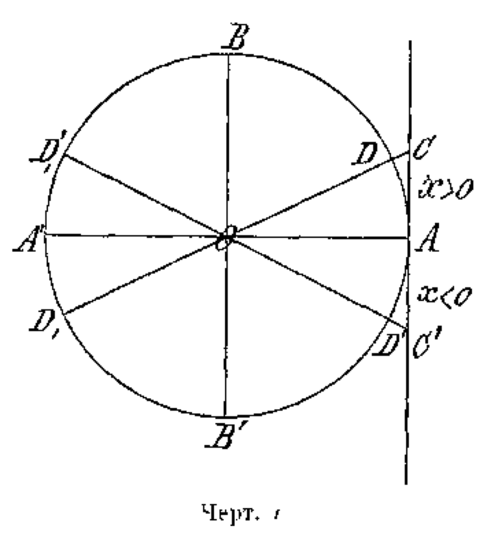
слѣд., $\operatorname{Arctg} x = \smile AD$

и $$\mathbf{arctgx} = k\pi + \mathbf{Arctgx} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Если $x < 0$, то подобнымъ же образомъ заключимъ, что

$$\mathrm{Arctgx} = \smile AD'$$

и опять $$\mathrm{arctg}x = k\pi + \mathrm{Arctg}x$$



Черт. 7

Такимъ образомъ младшій Arctg$x$ заключается въ 1-ой положительной четверти при $x > 0$ и въ 1-ой отрицательной при $x < 0$.

Кромѣ того, считая $AC = -AC'$, видимъ, что
$$\smile AD' = -\smile AD,$$

т. е. **Arctg $(-x) = -$ Arctg x.**

такъ что эта функція—нечетная.

44. Arccotgx. Наконецъ, имѣя въ виду, что

$$tg\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{Cotg}\ \alpha}$$

заключаемъ, что $$\mathrm{arccotg}\ x = \mathrm{arctg}\ \frac{1}{x}$$

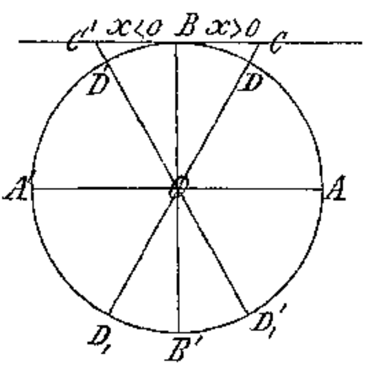
и, слѣд., $$\mathrm{Arccotg}\ x = \mathrm{Arctg}\ \frac{1}{x} \quad \ldots \quad (9),$$

а потому младшій Arccotg x лежитъ въ 1-й положительной четверти при $x > 0$ и въ 1-й отрицательной—при $x < 0$, причемъ

$$\mathbf{Arccotg\ (-x) = -Arccotgx.}$$

такъ что эта функція—нечетная; кромѣ того

$$\mathbf{arccotgx} = k\pi + \mathbf{Arccotgx} \quad \ldots (10).$$



Черт. 8.

45. Выраженіе однихъ круговыхъ функцій черезъ другія.

Если $x > 0$, то такія выраженія получаются очень просто на основаніи зависимостей между тригонометрическими функціями одной и той же дуги; если же $x < 0$, то лучше перейти сначала къ функціямъ отъ $(-x)$.

Такимъ образомъ напр., получаемъ:

$$\text{если } x > 0, \text{ то } \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} \sqrt{1-x^2} = \operatorname{Arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arccotg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$
$$= \operatorname{Arcsec} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arccosec} \frac{1}{x};$$

$$\operatorname{Arctg} 3 = \operatorname{Arccotg} \frac{1}{3} = \operatorname{Arcsec} \sqrt{10} = \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{10}} = \operatorname{Arcsin} \frac{3}{\sqrt{10}} = \operatorname{Arccosec} \frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$\operatorname{Arccotg}(-2) = \pi - \operatorname{Arccotg} 2 = \pi - \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} = \pi - \operatorname{Arccosec} \sqrt{5} = \pi - \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{5}} =$$
$$= \pi - \operatorname{Arccos} \frac{2}{\sqrt{5}} = \pi - \operatorname{Arcsec} \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \pi - \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \operatorname{Arctg} \sqrt{3} =$$
$$= \pi - \operatorname{Arccotg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \operatorname{Arcsec} 2 = \pi - \operatorname{Arccosec} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

46. Если надо выразить $\operatorname{Arccos} x$ въ $\operatorname{Arcsin} x$, или $\operatorname{Arccotg} x$ — въ $\operatorname{Arctg} x$, или, наконецъ, $\operatorname{Arccosec} x$ въ $\operatorname{Arcsec} x$, то можно это сдѣлать проще — на основаніи слѣдующихъ теоремъ:

I. $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$ при всякомъ x.

Дѣйствительно, если $x > 0$, то, положивъ $\operatorname{Arcsin} x = \alpha$,

имѣемъ $$\operatorname{Sin}\alpha = x \text{ и } \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x;$$

и такъ какъ дуга $\frac{\pi}{2} - \alpha$ заключается очевидно, между 0 и $\frac{\pi}{2}$, ибо α заключается въ такихъ же границахъ,

то $$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x,$$

откуда и получаемъ, что $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$.

Если $x < 0$; то, полагая $x = -y$, гдѣ уже $y > 0$, находимъ:

$$\text{Arcsin}\,x + \text{Arccos}\,x = \text{Arcsin}\,(-y) + \text{Arccos}\,(-y) = -\text{Arcsin}\,y + (\pi - \text{Arccos}\,y) = \pi - (\text{Arcsin}\,y + \text{Arccos}\,y) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

II. **Arcsec x + Arccosec x** $= \frac{\pi}{2}$ при всякомъ x.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\text{Arcsec}\,x + \text{Arccosec}\,x = \text{Arccos}\,\frac{1}{x} + \text{Arcsin}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

III. **Arctg x + Arccotg x** $= \frac{\pi}{2}$ при $x > 0$

и **Arctg x + Arccotg x** $= -\frac{\pi}{2}$ при $x < 0$.

Дѣйствительно, первое равенство докажется, какъ для Arcsin$x$ + Arccos$x$: второе же получаемъ изъ перваго, вспомнивъ, что обѣ слагаемыя функціи—нечетныя.

17. **Сложеніе круговыхъ функцій.** Подъ этимъ названіемъ разумѣютъ выраженіе суммы или разности нѣсколькихъ круговыхъ функцій въ видѣ **одной** новой круговой функціи. Такая задача рѣшается переходомъ къ тригонометрическимъ формуламъ, при чемъ, рѣшивъ ее, надо еще опредѣлить—какое именно значеніе полученной круговой функціи должно взять. Пояснить это удобнѣе всего на примѣрѣ.

Найти z, зная, что $\text{Arcsin}\left(-\frac{3}{4}\right) - \text{Arcsec}\,(-2) = \text{arccos}\,z$.

Полагая $\text{Arcsin}\left(-\frac{3}{4}\right) = \alpha$, $\text{Arcsec}\,(-2) = \beta$ и $\text{arccos}\,z = \gamma$,

имѣемъ, во-первыхъ: $\text{Sin}\,\alpha = -\frac{3}{4}$, $\text{Sec}\,\beta = -2$ и $\text{Cos}\,\gamma = z$,

а во-вторыхъ, $\alpha - \beta = \gamma$;

поэтому $z = \text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta$,

но такъ какъ α и β — суть младшія дуги,

то $\text{Cos}\,\alpha = +\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\text{Cos}\,\beta = -\frac{1}{2}$ и $\text{Sin}\,\beta = +\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

а потому $z = -\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$

и, слѣд., $\text{Arcsin}\left(-\frac{3}{4}\right) - \text{Arcsec}\,(-2) = \text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}\right) =$

$$= 2k\pi \pm \left[\pi - \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}\right]$$

При этомъ, такъ какъ $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{3}{4}\right)$ составляетъ приблизительно около $-50°$, а $\operatorname{Arcsec}(-2)$ равенъ $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$, т. е. $120°$, такъ что $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{3}{4}\right) - \operatorname{Arcsec}(-2)$ составляетъ около $170°$, между тѣмъ какъ $\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$ близокъ къ $0°$, то очевидно, надо взять $k=0$ и передъ скобками [ ] знакъ $-$, такъ что окончательно

$$\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{3}{4}\right) - \operatorname{Arcsec}(-2) = -\pi + \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}.$$

48. Формулы сложенія круговыхъ функцій. Такъ называются формулы, дающія выраженія суммы или разности двухъ **одноименныхъ** круговыхъ функцій въ видѣ одной **такой** же функціи; выводятся онѣ по способу предъидущаго №-а. Пусть, напр., надо найти z, зная, что

$$\operatorname{Arcsin} x \pm \operatorname{Arcsin} y = \arcsin z,$$

тогда, полагая $\operatorname{Arcsin} x = \alpha$, $\operatorname{Arcsin} y = \beta$ и $\arcsin z = \gamma$, имѣемъ, что

$$\alpha \pm \beta = \gamma$$

и

$$\operatorname{Sin}\alpha = x,\ \operatorname{Sin}\beta = y,\ \operatorname{Sin}\gamma = z,$$

откуда

$$z = \operatorname{Sin}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta \pm \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta = x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}$$

и, слѣд., $\mathbf{Arcsin\,x \pm Arcsin\,y = arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2})}$.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$\mathbf{Arccos\,x \pm Arccos\,y = arccos\,(xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})}$$

и

$$\mathbf{Arctg\,x \pm Arctg\,y = arctg\,\frac{x \pm y}{1 \mp xy}}.$$

Примѣръ. $\operatorname{Arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{Arctg}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \operatorname{Arctg}\dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}$

$$= \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

49. Формулы удвоенія круговыхъ функцій. Онѣ выражаютъ удвоенную круговую функцію, какъ одиночную такую же функцію нѣкотораго новаго аргумента, получить ихъ можно либо самостоятельно — по способу № 47-го, либо изъ формулъ № 48-го, полагая въ нихъ $y = x$. Такъ или иначе находимъ:

$$\mathbf{2\ Arcsin\,x = arcsin\,(2x\sqrt{1-x^2})}$$

$$\mathbf{2\ Arccos\,x = arccos\,(1-2x^2)}$$

и

$$\mathbf{2\ Arctg\,x = arctg\,\frac{2x}{1-x^2}}.$$

Примѣръ. $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} = 2 \cdot 2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} = 2 \operatorname{Arctg} \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = 2 \operatorname{Arctg} \frac{5}{12} =$

$$= \operatorname{Arctg} \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \operatorname{Arctg} \frac{120}{119},$$

$$\operatorname{Arctg} \frac{120}{119} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{Arctg} 1 = \operatorname{Arctg} \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \operatorname{Arctg} \frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}} = \operatorname{Arctg} \frac{1}{239};$$

слѣд., $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{239}$

и потому $\pi = 16 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{239}.$

ГЛАВА III.

Теорія предѣловъ.

§ 1. Понятіе о предѣлѣ. Теоремы о существованіи предѣла.

50. Опредѣленіе 1. Безконечно малой величиной наз. **перемѣнная**, абсолютное значеніе коей можетъ быть сдѣлано и **затѣмъ уже всегда остается** меньше произвольно выбраннаго положительнаго числа, какъ бы оно мало ни было.

Опредѣленіе 2. Перемѣнное число, абсолютная величина коего растетъ такъ, что можетъ стать больше каждаго, сколь угодно большаго, положительнаго числа A, наз. **безконечно растущимъ**; короче его наз. **безконечностью** и обозначаютъ знакомъ ∞.

Очевидно, что если x — безк. мало, то $\frac{1}{x}$ — безк. велико, ибо стоитъ взять $|x| < \frac{1}{A}$, что бы получить $\left|\frac{1}{x}\right| > A$; и обратно.

Опредѣленіе 3. Число, абсолютное значеніе коего не можетъ ни расти безгранично, ни стать безк.-малымъ, наз. **конечнымъ**.

Замѣтимъ, что изъ данныхъ опредѣленій не слѣдуетъ, что безк. малая не можетъ въ нѣкоторый моментъ своего существованія быть и весьма большой, а безк.-большая не можетъ когда нибудь оказаться и весьма малой; однако при примѣненіи этихъ понятій мы будемъ считать, что безк. малая разсматривается уже тогда, когда она стала пренебрежимо-мала сравнительно со всѣми конечными величинами, а безк.-большая — уже тогда, когда она стала такъ велика, что всѣ конечныя величины пренебрежимо малы сравнительно съ нею.

51. Опредѣленіе 4. Предѣломъ перемѣннаго числа w наз. такое **постоянное** число, разность коего и перемѣннаго безк. мала. Отсюда между прочимъ слѣдуетъ, что предѣлъ безк. малой есть нуль; напротивъ того, безконечность никогда нельзя назвать предѣломъ чего-либо, ибо по самому опредѣленію ея она есть число перемѣнное.

Очевидно, что нуль можетъ быть разсматриваемъ, какъ частный случай безк.-малыхъ величинъ, ибо онъ меньше всякаго положительнаго числа; а, слѣд., всякое постоянное число можно разсматривать, какъ такое перемѣнное, которое все время равно своему предѣлу.

Что бы выразить, что w имѣетъ предѣломъ c, пишутъ:

$$Пред.\ w = c \quad \text{или еще} \quad Lim\ w = c,$$

при чемъ изъ этого, по опредѣленію, вытекаетъ еще, что

$$w - c = \alpha,$$

гдѣ α — безк. мало.

Если w — есть число независимое, то приближеніе его къ какому либо предѣлу c совершается просто потому, что мы беремъ его послѣдовательныя значенія все болѣе и болѣе близкими къ c, если же w есть функція какихъ либо аргументовъ x, y, z,... то приближеніе его къ c является слѣдствіемъ приближенія этихъ аргументовъ къ какимъ либо величинамъ x_0, y_0, z_0 либо возрастанія ихъ до ∞; при этомъ, что бы выразить стремленіе w къ c при увеличеніи напр., x до ∞ и приближеніи y къ y_0 и z къ z_0, пишутъ такъ:

$$c = \text{Пред. } w_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots y_0 \\ z \ldots z_0}}$$

Замѣтимъ еще, что предѣлъ c перемѣннаго числа w есть постоянное число, существующее самостоятельно -независимо отъ числа w; разсмотрѣніе же его, какъ предѣла значеній числа w, есть лишь способъ найти зависимость между c и x_0, y_0, z_0..., на основаніи зависимости между w и x, y, z, при чемъ изложеніе средствъ для этого и составляетъ содержаніе Теоріи Предѣловъ.

52. Установленное выше понятіе о предѣлѣ позволяетъ лишь узнать, будетъ ли данное постоянное число предѣломъ перемѣннаго w; между тѣмъ весьма часто намъ важно лишь рѣшить, существуетъ-ли у w какой-нибудь предѣлъ, точное же значеніе послѣдняго мы даже можетъ быть не въ состояніи вычислить. Поэтому

прежде всего займемся теоремами, ведущими къ рѣшенію вопроса о существованіи предѣла.

Теорема 1. Если x растетъ все время, но не до ∞, то навѣрное имѣетъ предѣлъ.

Пусть послѣдовательныя значенія числа x будутъ x_1, x_2, $x_3 \dots x_k$, $x_{k+1}, \dots$ *) при чемъ число k можемъ брать сколь угодно большимъ, и, по условію,

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots$$

Разсматривая совокупность всѣхъ чиселъ, какія только можно себѣ вообразить, мы можемъ разбить ихъ на двѣ группы: въ первую (e) отнесемъ всѣ числа (m), которыя меньше хоть **какого-либо** изъ чиселъ x_k — напр., $< x_n$ либо равны одному изъ нихъ, а во вторую (E)—всѣ остальныя, т. е. тѣ числа (M), которыя больше **всѣхъ** x_k. При этомъ ясно, что если число m принадлежитъ къ группѣ e, то всякое **меньшее** число m_1 подавно принадлежитъ къ ней же, ибо изъ неравенствъ

$$m < x_n \quad \text{и} \quad m_1 < m$$

вытекаетъ, что и $\qquad m_1 < x_n;$

наоборотъ, если число M принадлежитъ къ группѣ E, то и всякое **большее** число M_1 принадлежитъ къ ней же, ибо изъ неравенствъ $\qquad M_1 > M$ и $M > x_k$ при всякомъ k,
слѣдуетъ, что и $\qquad M_1 > x_k$ при любомъ k.

Возьмемъ теперь какую либо прямую (черт. 9) и, отложивъ на

$o \quad m \quad x_1 \quad x_2 \quad X \quad x_k \quad M_0 \quad X$

Черт. 9.

ней отрѣзки ox_1, $ox_2 \dots$, выражаемые при какомъ либо масштабѣ числами x_1, $x_2 \dots$, заставимъ точку X двигаться отъ $-\infty$ къ ∞; каждому ея положенію X отвѣчаетъ нѣкоторое опредѣленное число X, выражающее длину соотвѣтствующаго отрѣзка OX, при чемъ сначала эти числа принадлежатъ къ группѣ e, а въ концѣ—къ группѣ E, такъ что при нѣкоторомъ положеніи M_0 движущейся точки происходитъ переходъ чиселъ X изъ первой группы во вторую, при чемъ это положеніе M_0—единственное, ибо изъ сдѣланныхъ выше

*) Знаками 1, 2,... k,... мы не хотимъ перечислить всѣ значенія числа x, а лишь указываемъ послѣдовательность полученія ими этихъ величинъ.

замѣчаній на счетъ m_1 и M_1 слѣдуетъ, что обратный переходъ — изъ E въ e невозможенъ. Число M_0, выражающее длину отрѣзка OM_0, и есть предѣлъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots$

Дѣйствительно, **во-первыхъ**, $M_0 > x_k$ при всякомъ k, ибо, если бы, напр., было $M_0 < x_{51}$, то уже непремѣнно $M_0 < x_{52}$
и, слѣд., $M - x_{52} - a$,
гдѣ $a > 0$, откуда $M_0 + a - x_{52} < x_{53}$,
такъ что число $M_0 + a$ принадлежало бы еще къ группѣ e, а потому, меньшее число M_0 не могло бы быть переходнымъ.

Во-вторыхъ, разность $M_0 - x_k$ можно уменьшить сколь-угодно, ибо если бы, напр., имѣли, что $M_0 - x_k > b$ при всякомъ k, то получили бы, что $M_0 - b > x_k$ при всякомъ k, такъ что число $M_0 - b$ принадлежало бы уже къ группѣ E, а потому большее число M_0 не могло бы быть переходнымъ.

Наконецъ, разность $M_0 - x_k$ убываетъ при увеличеніи k, ибо x_k при этомъ растетъ.

Такимъ образомъ разность $M_0 - x_k$, будучи положительной, можетъ быть сдѣлана и затѣмъ всегда остается меньше всякаго, напередъ задаваемаго, положительнаго числа; слѣд., она безк. мала, а потому

$$M_0 = \text{Пред. } x, \text{ при чемъ } M_0 > x_k.$$

Такимъ же образомъ можно доказать, что если число x убываетъ все время, но не безгранично, то навѣрное стремится къ нѣкоторому предѣлу x_0, при чемъ $x_0 < x$.

53. Лемма. Если число y, принимающее послѣдовательно значенія $y_1, y_2, y_3, \ldots y_k, y_{k+1}, \ldots$ не растетъ безгранично, то существуетъ число M, характеризуемое слѣдующими двумя свойствами:

1) $M \geqslant$ всякаго изъ y'овъ

и 2) $M - y$ можно сдѣлать либо нулемъ, либо сколь угодно малымъ.

Это число наз. **высшей границей** чиселъ y („Obere Grenze", „Limite supérieure").

При доказательствѣ различимъ три случая.

I) Числа y_k все время растутъ. Такъ какъ при этомъ они, по условію, остаются конечными, то стремятся къ нѣкоторому предѣлу y_0, при чемъ $y_0 > y_k$ при любомъ k и $y_0 - y_k =$ безк. малой; слѣд., y_0 и есть искомое M.

II) Числа y_k то растутъ, то убываютъ, при чемъ еди нихъ есть такой—напр., y_n, который больше всѣхъ прочихъ (нѣкоторымъ, быть можетъ, равенъ). Тогда этотъ y_n и есть искомое M, при чемъ второе свойство удовлетворяется подъ видомъ равенства

$$(M \quad y_k)_{k=n}=0.$$

III. Числа y_k то растутъ, то убываютъ, но при этомъ средп нихъ нѣтъ такого, который былъ бы больше всѣхъ прочихъ. Въ этомъ случаѣ построимъ новую группу чисел (z) слѣдующимъ образомъ: за z_1 возьмемъ y_1; за z_2—первый пзъ тѣхъ y'овъ, съ которыхъ начинается убываніе ихъ и который въ то же время больше z_1; за z_3—первый изъ такихъ же y'овъ, который больше z_2; и т. д. Тогда ясно, что группа чиселъ z безконечна, при чемъ они растутъ все время, однако не до ∞, ибо всѣ они выбираются среди y'овъ, которые конечны; значитъ, какъ въ случаѣ I-мъ, они имѣютъ высшую границу M, которая будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и высшей границей y'овъ, ибо: 1) всякій y меньше одного пзъ z'овъ, а послѣдній $<M$, такъ что и всякій $y<M$; и 2) разность $M-z$ можно уменьшить какъ угодно, а слѣд., это можно сдѣлать и съ $M-y$, ибо всякій z есть одинъ изъ y'овъ.

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что если числа y не убываютъ до (∞), то у нихъ существуетъ **низшая граница m** („Untere Grenze“ „Limite inférieure“), характеризуемая слѣдующими свойствами:

1) $m\leqslant$ всякаго y'а

и 2) $y-m$ можно сдѣлать либо нулемъ, либо сколь угодно малымъ.

Примѣръ 1. Для группы 0; 0,2; 0,4; 0,3; 0,36; 0,366; 0,3666;...
имѣемъ
$$M=0{,}4;\ m=0.$$

Примѣръ 2. Для группы 0, 0,2; 0,3 0,27; 0,36; 0.277; 0,366, 0,2777; 0,3666; . .
имѣемъ:
$$M=\frac{36-3}{30}=\frac{11}{30};\ m=0.$$

54. Теорема 2. Если имѣемъ двѣ безконечныхъ группы чиселъ n_k и N_k, при чемъ **любое** число первой меньше **всякаго** числа второй, а разность N_k-n_k **соотвѣтственныхъ** чиселъ идетъ къ нулю при увеличеніи k до ∞, то числа обѣихъ группъ имѣютъ предѣлъ и при томъ одинъ и тотъ же.

Дѣйствительно, на основаніи предыдущаго № заключаемъ, что числа n_k имѣютъ „высшую границу“ M, ибо всѣ они меньше, напр., чѣмъ N_1; значитъ,

$$n_k < M,$$

при чемъ, по свойству высшей границы, разность $M - n_k$ можно сдѣлать сколь угодно малою; отсюда слѣдуетъ еще, что

$$M < N_k$$

при всякомъ k, ибо, если бы, напр., было $M > N_{78}$, т. е. $M = N_{78} + a$, гдѣ $a > 0$,

то имѣли бы: $M - n_k = (N_{78} + a) - n_k = N_{78} - n_k + a > a$,

ибо по условію $N_{78} - n_k > 0$,

а это противорѣчитъ произвольной малости $M - n_k$.

Итакъ, $n_k < M < N_k$;

поэтому $0 < M - n_k < N_k - n_k$ и $0 < N_k - M < N_k - n_k$;

а такъ какъ по условію $N_k - n_k$ безк. мало,

то тѣмъ болѣе $M - n_k$ и $N_k - M$ безк. малы, т. е.

M есть предѣлъ $(N_k)_{k=\infty}$

и M есть предѣлъ $(n_k)_{k=\infty}$

55. Теорема 3. Что бы перемѣнное число y, принимающее послѣдовательно значенія $y_1, y_2, \dots y_k, \dots$, стремилось при этомъ къ нѣкоторому предѣлу, **необходимо и достаточно**, что бы разность $y_{n+p} - y_n$ стремилась къ нулю при увеличеніи n до ∞, **какого бы ни было положительное число p** (хотя бы оно само расло безгранично, и даже быстрѣе, чѣмъ n).

Дѣйствительно, это условіе необходимо, ибо если y_k имѣетъ предѣлъ напр., y_0, то

$$y_n = y_0 + \alpha_n,$$

при чемъ пред. $(\alpha_n)_{n=\infty} = 0$;

поэтому и $y_{n+p} = y_0 + \alpha_{n+p}$,

при чемъ тѣмъ болѣе пред $(\alpha_{n+p})_{n=\infty} = 0$

а слѣд., Пред. $(y_{n+p} - y_n)_{n=\infty} =$ пред. $[(y_0 + \alpha_{n+p}) - (y_0 + \alpha_n)]_{n=\infty} =$ $=$ Пред. $(\alpha_{n+p} - \alpha_n)_{n=\infty} = 0$.

Наоборотъ, допустимъ, что указанное условіе выполнено.

Разность $y_{n+k} - y_n$, гдѣ $k > 0$,

при данномъ n мѣняется отъ измѣненія k, но ни въ какомъ случаѣ не дѣлается безк.-большой; поэтому ея абсолютная величина имѣетъ высшую границу ε_n, такъ что

$$|y_{n+k}-y_n| \leqslant \varepsilon_n$$

для всякаго k, при чемъ еще по условію пред. $(\varepsilon_n)_{n=\infty}=0$; подобнымъ же образомъ имѣемъ:

$$|y_{(n+p)+k}-y_{n+p}| \leqslant \varepsilon_{n+p} \text{ при любомъ } k.$$

Но первое неравенство при $k=p$ даетъ: $|y_{n+p}-y_n| \leqslant \varepsilon_n$,

т. е. $$-\varepsilon_n \leqslant y_{n+p}-y_n \text{ и } y_{n+p}-y_n \leqslant \varepsilon_n,$$

откуда $$y_n-\varepsilon_n \leqslant y_{n+p} \text{ и } y_{n+p} \leqslant y_n+\varepsilon_n,$$

а тѣмъ болѣе $$y_n-\varepsilon_n < y_{n+p}+\varepsilon_{n+p} \text{ и } y_{n+p}-\varepsilon_{n+p} < y_n+\varepsilon_n,$$

т. е. $$y_n-\varepsilon_n < y_m+\varepsilon_m,$$

при всякихъ m и n. Такимъ образомъ числа $y_n-\varepsilon_n$ и числа $y_m+\varepsilon_m$ образуютъ двѣ такихъ группы, которыя удовлетворяютъ условіямъ теоремы 2-ой, ибо еще $(y_n+\varepsilon_n)-(y_n-\varepsilon_n)=2\varepsilon_n$ безк. малой; слѣд., эти числа имѣютъ нѣкоторый общій предѣлъ y_0; а такъ какъ

$$\text{пред. } (\varepsilon_n)_{n=\infty}=0,$$

то просто $$\text{Пред. } (y_n)_{n=\infty}=y_0.$$

Значитъ, указанное выше условіе и достаточно.

§ 2. Основныя теоремы о предѣлахъ.

56. Лемма 1. Сумма **конечнаго** числа безк.-малыхъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ сама безк. мала.

Въ самомъ дѣлѣ, каждая изъ этихъ величинъ съ нѣкотораго момента сдѣлается по абсолютной величинѣ меньше $\frac{\varepsilon}{n}$, гдѣ ε—произвольно-малое положительное число; поэтому съ нѣкотораго момента

$$|\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+\dots+|\alpha_n| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{n}+\frac{\varepsilon}{n}+\dots+\frac{\varepsilon}{n}}_{n \text{ разъ}}=\varepsilon,$$

что и показываетъ, что сумма $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ безк.-мала.

Лемма 2. Произведеніе **конечнаго** числа x на безк.-малое α само безк.-мало.

Дѣйствительно, по условію всегда $|x|<A$, гдѣ A—нѣкоторое опредѣленное постоянное положительное число; съ другой стороны съ нѣкотораго момента все время $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{A}$, гдѣ ε—произвольно-малое положительное число; поэтому съ того же момента

$$|x\alpha|=|x|\cdot|\alpha| \leqslant A.\frac{\varepsilon}{A}=\varepsilon;$$

а это и показываетъ, что $x\alpha$ безк.-мало.

57. Теорема 1. Одна и та же перемѣнная не можетъ **одновременно** стремиться къ двумъ разнымъ предѣламъ.

Дѣйствительно, допустимъ, что x одновременно стремится къ предѣламъ a и b, такъ что

$$a \quad x+\alpha \text{ и } b \quad x+\beta,$$

гдѣ α и β —безк.-малы: тогда $a-b \quad \alpha \quad \beta$, и такъ какъ $a-b$—число постоянное, $a \alpha$ и β — безк.-малыя, то это равенство возможно, лишь когда $a=b$ (и, слѣд., $\alpha=\beta$).

Теорема 2. Если всѣ значенія перемѣнной измѣнятъ свой знакъ на обратный, то и предѣлъ ея перемѣнитъ знакъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть a — пред. x, такъ что $a=x+\alpha$, гдѣ α — безк.-мало; тогда

$$-a \quad -x-\alpha.$$

и такъ какъ и $(-\alpha)$—безк.-мало, то $-a \quad$ пред. $(-x)$.

58. Теорема 3. Если изъ двухъ перемѣнныхъ x и y, имѣющихъ предѣлами a и b, первая все время меньше либо равна второй:

$$x<y,$$

то и предѣлъ первой меньше либо равенъ предѣлу второй.

Дѣйствительно, такъ какъ пред. $x=a$ и пред. $y=b$,
то $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$;
допустивъ, что $a>b$ напр., $a=b+c$,
при чемъ c — постоянное положительное число,
получимъ: $x-y=(a+\alpha)-(b+\beta)=a-b+\alpha-\beta=c+\alpha-\beta>0$,
ибо $\alpha-\beta$ — безк.-мало; а это противорѣчитъ условію, что $x\leqslant y$.

Замѣчаніе. Выраженіе: „x все время меньше y“ надо понимать не въ томъ смыслѣ, что любое значеніе x'а меньше всякаго значенія y'а, а въ томъ, что каждому значенію x'а отвѣчаетъ нѣкоторое значеніе y'а, которое больше него; такія соотвѣтствующія значенія обыкновенно отмѣчаютъ однимъ и тѣмъ-же указателемъ—напр.,

$$x_n \text{ и } y_n.$$

Слѣдствіе. Если всегда $x \leqslant A$, гдѣ A постоянное, то и

$$\text{Пред. } (x) \leqslant A.$$

Теорема 4. Если двѣ перемѣнныя x и y равны при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ и **одна изъ нихъ имѣетъ предѣлъ** a, то и другая предѣлъ имѣетъ, и при томъ тотъ же самый.

Дѣйствительно, такъ какъ $a = \text{пред. } x$,
то $x = a + \alpha$, гдѣ α — безк.—мало,
но такъ какъ еще $y = x$, то и $y = a + \alpha$,
а слѣд., y имѣетъ a предѣломъ.

Замѣчаніе. Часто эту теорему выражаютъ такъ: „предѣлы тожественно равныхъ перемѣнныхъ сами равны". но такой редакціей вводится неявное предположеніе, что у обѣихъ перемѣнныхъ предѣлы уже завѣдомо существуютъ, а между тѣмъ въ приложеніяхъ этой теоремы намъ часто важнѣе всего именно доказать существованіе предѣла у одной изъ двухъ тожественно равныхъ перемѣнныхъ.

59. Теорема 5. Предѣлъ алгебрической суммы **конечнаго** числа слагаемыхъ равенъ такой же алгебрической суммѣ ихъ предѣловъ.

Пусть $a_1 = \text{Пред. } x_1,\ a_2 = \text{Пред. } x_2, \ldots a_n = \text{Пред. } x_n$,
т. е. $x_1 = a_1 + \alpha_1,\ x_2 = a_2 + \alpha_2, \ldots x_n = a_n + \alpha_n$,
гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ — безк.-малы; тогда

$$x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n = (a_1 + \alpha_1) \pm (a_2 + \alpha_2) \pm \ldots \pm (a_n + \alpha_n) = a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n + \\ + (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_n);$$

и такъ какъ $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ число постоянное,
а $\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_n$ — безк.-мало,
то $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n = \text{Пред. } (x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n)$,
т. е. $\text{Пред. } (x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n) = \text{Пред. } x_1 \pm \text{Пред. } x_2 \pm \ldots \pm \text{Пред. } x_n$,
при чемъ ясно, что знаки въ обѣихъ частяхъ должны быть соотвѣтственны.

Замѣчаніе 1. Если нѣкоторыя изъ слагаемыхъ обращаются въ $\pm\infty$, то теорема эта, конечно, не примѣнима; однако если всѣ они — одного знака, то можемъ все таки сдѣлать опредѣленное заключеніе о всей суммѣ — именно, ясно, что и она обращается въ ∞ того же знака; если же безконечныя слагаемыя имѣютъ разные знаки, то величина суммы неопредѣленна; напр.,

$$\text{Пред.}\,(x-\sqrt{x^2-1})_{x=\infty}=\text{Пред.}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)_{x=\infty}=0,$$

а
$$(x^2-x\sqrt{x^2-x})_{x=\infty}=\left[x(x-\sqrt{x^2-x})\right]_{x=\infty}=$$
$$=\left(x\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}\right)_{x=\infty}>\left[\frac{x^2}{x+\sqrt{x^2}}\right]_{x=\infty}=\left(\frac{x^2}{2x}\right)_{x=\infty}=\left(\frac{x}{2}\right)_{x=\infty}=\infty,$$

для обозначенія этой неопредѣленности употребляютъ символъ $\infty-\infty$.

Замѣчаніе 2. Доказанная теорема не примѣнима также, когда число слагаемыхъ безконечно; при этомъ, если всѣ они остаются величинами конечными, то сумма либо растетъ безгранично, либо будетъ неопредѣленной; если слагаемыя убываютъ до нуля по мѣрѣ увеличенія ихъ нумера, то сумма наз. безконечной строкой или безконечнымъ рядомъ, а для опредѣленія ея величины нужны особыя изслѣдованія, образующія предметъ такъ наз. Теоріи рядовъ; если, наконецъ, всѣ слагаемыя стремятся къ нулю по мѣрѣ увеличенія ихъ числа до ∞, то опредѣленіе величины суммы основывается на методахъ Интегральнаго Исчисленія.

60. Теорема 6. Предѣлъ произведенія **конечнаго** числа множителей равенъ произведенію ихъ предѣловъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть пред. $x=a$ и пред. $y=b$,
т. е. $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$, гдѣ α и β — безк.-малы;
тогда $xy=(a+\alpha)(b+\beta)=ab+b\alpha+a\beta+\alpha\beta$,
но $b\alpha$, $a\beta$ и $\alpha\beta$ — безк.-малы, равно какъ и ихъ сумма;
слѣд., $ab=$ Пред. (xy),
т. е. Пред. $(xy)=$ Пред. (x). Пред. (y).

Допуская теперь, что теорема вѣрна для n множителей $(xyz\ldots v)$, такъ что Пред. $(xyz\ldots v)=$ Пред. x. Пред. y. Пред. $z\ldots$ Пред. v, выводимъ, что она справедлива и для $n+1$, ибо

Пред. $(xyz\ldots vw)=$ Пред. $[(xyz\ldots v).w]=$ Пред. $(xyz\ldots v)$. Пред. $w=$
$=$ Пред. x. Пред. y. Пред. $z\ldots$ Пред. v. Пред. w,

отсюда заключаемъ, что она справедлива всегда.

Слѣдствіе 1. Предѣлъ произведенія перемѣннаго числа на постоянное равенъ произведенію послѣдняго на предѣлъ перваго; иначе говоря, постоянный множитель можно выносить изъ подъ знака предѣла.

Слѣдствіе 2. Предѣлъ цѣлой положительной степени перемѣннаго числа равенъ такой же степени предѣла этого числа.

Замѣчаніе 1. Предъидущая теорема, конечно, не примѣнима, если въ числѣ множителей есть безгранично-растущіе; однако, если при этомъ нѣтъ безк.-малыхъ множителей, то ясно, что все произведеніе растетъ до ∞; если же одни множители обращаются въ ∞, а другіе стремятся къ нулю, то произведеніе становится неопредѣленнымъ; напр.,

$$Пред. \left(x^2 \cdot \frac{1}{x}\right)_{x=\infty} = Пред. (x)_{x=o} = 0; \text{ а } Пред. \left(x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\right)_{x=o} = 1;$$

эту неопредѣленность обозначаютъ символомъ $o . \infty$.

Замѣчаніе 2. Теорема не примѣнима также, когда число множителей безк.-велико; тогда получаемъ такъ наз. безконечное произведеніе, опредѣленіе величины коего требуетъ особыхъ пріемовъ, образующихъ предметъ особой главы Анализа.

61. Теорема 7. Предѣлъ отношенія равенъ отношенію предѣловъ, если только предѣлъ знаменателя не нуль.

Дѣйствительно, пусть $Пред.\ x = a$, $Пред.\ y = b \mp o$,

такъ что $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, гдѣ α и β — безк.-малы.

Тогда $$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha - ab - a\beta}{b\,(b+\beta)} = \frac{b\alpha - a\beta}{b\,(b+\beta)};$$

но $b\alpha$ и $a\beta$, а слѣд., и $b\alpha - a\beta$ — безк.-малы; съ другой стороны, такъ какъ $b \mp o$, то при достаточномъ приближеніи y къ b, т. е. β къ нулю, будемъ имѣть, что и $b + \beta \mp o$, такъ что вся дробь $\frac{b\alpha - a\beta}{b\,(b+\beta)}$ будетъ безк.-мала; поэтому

$$Пред. \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a}{b}, \text{ т. е. } Пред. \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{Пред.\ x}{Пред.\ y}.$$

Замѣчаніе 1. Если знаменатель идетъ къ нулю, а числитель остается конечнымъ, то ясно, что вся дробь растетъ безгранично; если же и числитель, и знаменатель идутъ къ нулю, то получается неопредѣленность, обозначаемая символомъ $\frac{0}{0}$. (Что касается случая, когда числитель идетъ къ нулю, а знаменатель остается конечнымъ, то онъ не представляетъ ничего исключительнаго и предѣлъ всей дроби равенъ тогда нулю).

Замѣчаніе 2. Теорема не примѣнима, когда числитель или знаменатель обращаются въ ∞; при этомъ, если безконеченъ только числитель, то ясно, что то же будетъ и со всей дробью; если безконеченъ только знаменатель, то предѣлъ дроби равенъ нулю; а если и числитель, и знаменатель равны ∞, то получаемъ новый видъ неопредѣленности, изображаемый символомъ $\frac{\infty}{\infty}$.

62. Теперь намъ слѣдовало бы перейти къ предѣламъ степенныхъ и показательныхъ функцій; но предварительно надо установить понятіе о степени съ несоизмѣримымъ показателемъ, для чего въ свою очередь раньше докажемъ два свойства степеней съ показателями соизмѣримыми.

Свойство 1. Если показатель x степени положителенъ, то сама степень, одновременно со своимъ основаніемъ a, будетъ больше 1, равна 1 или меньше 1.

Дѣйствительно, пусть сначала x — число цѣлое, напр., $x = m > 0$; тогда, если $a < 1$, такъ что $a = 1 + b$, гдѣ $b > 0$, то

$$a^x = (1+b)^m = 1 + \frac{m}{1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \ldots > 1,$$

ибо всѣ биноміальные коэфиціенты положительны; если $a = 1$, то ясно само собой, что $a^x = 1^m = 1$; если, наконецъ, $a < 1$, то, полагая $a = \frac{1}{c}$, гдѣ уже $c > 1$, имѣемъ $a^x = \left(\frac{1}{c}\right)^m = \frac{1}{c^m} < 1$, ибо $c^m > 1$, какъ уже доказано.

Пусть теперь $x = \frac{1}{n}$, гдѣ n цѣлое; тогда, полагая $a^{\frac{1}{n}} = b$, имѣемъ

$$a = b^n,$$

откуда заключаемъ, что, напр., при $a > 1$ непремѣнно и $b > 1$, ибо при $b < 1$ имѣли бы, что и $b^n < 1$, т. е. $a < 1$.

Наконецъ, если $x = \frac{m}{n}$, то, написавъ, что $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, заключаемъ на основаніи двухъ первыхъ случаевъ, что теорема также вѣрна.

Слѣдствіе. Если $a > 1$, то a^x растетъ вмѣстѣ съ x, ибо, полагая $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$,

имѣемъ.
$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} > 1, \text{ т. е. } a^{x_2} > a^{x_1}$$

наоборотъ, если $a < 1$, то a^x убываетъ при увеличеніи x.

Свойство 2. Если n — цѣлое положительное число, то

$$\text{Пред}\left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{n=\infty} = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., $a > 1$, тогда и $a^{\frac{1}{n}} > 1$, такъ что можемъ положить

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + b, \text{ гдѣ } b > o;$$

отсюда $$a = (1 + b)^n = 1 + \frac{n}{1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \ldots > nb,$$

ибо всѣ слагаемыя въ правой части положительны; значитъ,

$$0 < nb < a \text{ или } 0 < b < \frac{a}{n},$$

а потому $$\text{Пред. } (b)_{n \ldots \infty} = 0, \text{ т. е. Пред. } \left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{n \ldots \infty} = 1$$

Пусть теперь $a < 1$; тогда можемъ положить

$$a = \frac{1}{c}, \text{ гдѣ ужé } c > 1,$$

такъ что $$\text{Пред.} \left(a^{\frac{1}{n}} \right)_{n \ldots \infty} = \text{Пред.} \left[\left(\frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{n}} \right]_{n \ldots \infty} = \frac{1}{\text{Пред.} \left(c^{\frac{1}{n}} \right)_{n \ldots \infty}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Наконецъ, если $a = 1$, то $a^{\frac{1}{n}} = 1$,

а слѣд., и $$\text{Пред.} \left(a^{\frac{1}{n}} \right)_{n \ldots \infty} = 1.$$

63. Понятіе о степени съ несоизмѣримымъ показателемъ. Пусть x—число несоизмѣримое; беря произвольно положительное цѣлое число n, мы можемъ найти такое другое цѣлое число m, что x будетъ заключаться между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$:

$$\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n},$$

послѣ чего можемъ вычислить (съ любой степенью точности $a^{\frac{m}{n}}$ и $a^{\frac{m+1}{n}}$. Будемъ затѣмъ мѣнять n и, подыскивая каждый разъ соотвѣтствующее m, построимъ всѣ числа ν вида $a^{\frac{m}{n}}$ и всѣ числа N вида $a^{\frac{m}{n}}$; тогда, если для опредѣленности дальнѣйшей рѣчи предположимъ, напр., что $a > 1$, то всякое число ν' первой группы будетъ меньше всякаго числа N'' второй, ибо

$$\nu' = a^{\frac{m'}{n'}}, \text{ а } N'' = a^{\frac{m''+1}{n''}}; \text{ и такъ какъ } \frac{m'}{n'} < x, \text{ а } \frac{m''+1}{n''} > x,$$

то $$\frac{m'}{n'} < \frac{m''+1}{n''}, \text{ а слѣд., и } a^{\frac{m'}{n'}} < a^{\frac{m''+1}{n''}};$$

съ другой стороны, беря два соотвѣтственныхъ числа ν и N, имѣемъ, что Пред. $\left(\frac{N}{\nu}\right)$ = Пред. $\left(\frac{a^{\frac{m+1}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}\right)_{n...\infty}$ = Пред. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{n...\infty} = 1$;

и такъ сами числа N и ν — конечны,

то $$\text{Пред. } (N-\nu)_{n...\infty} = \text{Пред.} \left[\nu\left(\frac{N}{\nu} - 1\right)\right]_{n...\infty} = 0.$$

Такимъ образомъ числа вида $a^{\frac{m}{n}}$ и числа вида $a^{\frac{m+1}{n}}$ образуютъ двѣ такихъ группы, что любое число первой меньше всякаго числа второй, а разность соотвѣтственныхъ изъ нихъ идетъ къ нулю; общій предѣлъ этихъ чиселъ мы и примемъ за значеніе a^x, при чемъ мы знаемъ (№ 54), что этотъ предѣлъ заключается между числами вида $a^{\frac{m}{n}}$ и числами вида $a^{\frac{m+1}{n}}$. Это послѣднее замѣчаніе показываетъ, какъ надо поступить на практикѣ, что бы найти приближенное значеніе a^x при x несоизмѣримомъ; если, напр., надо найти $3^{\sqrt{2}}$, то, замѣчая, что $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$ и что $3^{1{,}4142} = 4{,}7287$ и $3^{1{,}4143} = 4{,}7293$, заключаемъ, что $3^{\sqrt{2}} = 4{,}729$ съ точностью до 0,001.

64. Для того, чтобы введенное нами понятіе о степени съ несоизмѣримымъ показателемъ было допустимо, необходимо, чтобы всѣ свойства степени при этомъ сохранялись. Докажемъ, что это такъ и есть.

1) Если $a>1$, то a^x растетъ вмѣстѣ съ x.

Дѣйствительно, пусть $x_1 < x_2$; мы можемъ выбрать такое цѣлое положительное число n,

что $$\frac{1}{n} < x_2 - x_1,$$

а тогда сможемъ подыскать и такое цѣлое число m, что

$$\frac{m-1}{n} < x_1 < \frac{m}{n} < x_2 < \frac{m+1}{n},$$

послѣ чего будемъ имѣть, что

$$a^{x_1} < a^{\frac{m}{n}} < a^{x_2}, \text{ т. е. } a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Такъ же убѣдимся, что если $a < 1$, то a^x убываетъ, когда x растетъ.

2) Пред. $\left(a^{\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1$, если только $a \neq 0$. Дѣйствительно, если α идетъ къ нулю, будучи положительнымъ, то $\frac{1}{\alpha}$ растетъ до ∞; поэтому, обозначая черезъ n цѣлую часть этого числа, будемъ имѣть.

$$n \leqslant \frac{1}{\alpha} < n+1 \text{ и, слѣд., } \frac{1}{n} \geqslant \alpha > \frac{1}{n+1}$$

причемъ, во-первыхъ, n растетъ до ∞ при приближеніи α къ нулю, а во-вторыхъ, a^{α} заключается между $a^{\frac{1}{n}}$ и $a^{\frac{1}{n+1}}$; а такъ какъ

$$\text{Пред. } \left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{n=\infty} = 1 \text{ и Пред. } \left(a^{\frac{1}{n+1}}\right)_{n=\infty} = 1,$$

то и

$$\text{Пред. } \left(a^{\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1.$$

3) Показатель произведенія степеней одного и того же числа равенъ суммѣ показателей множителей. Дѣйствительно, выбравъ цѣлыя числа m_1, m_2 и n (изъ нихъ n—положительное) такъ, чтобы было

$$\frac{m_1}{n} \leqslant x_1 < \frac{m_1+1}{n} \text{ и } \frac{m_2}{n} \leqslant x_2 < \frac{m_2+1}{n},$$

будемъ имѣть (если, напр., $a > 1$), что

$$a^{\frac{m_1}{n}} \cdot a^{\frac{m_2}{n}} \leqslant a^{x_1} \cdot a^{x_2} < a^{\frac{m_1+1}{n}} \cdot a^{\frac{m_2+1}{n}}$$

или

$$a^{\frac{m_1+m_2}{n}} \leqslant a^{x_1} \cdot a^{x_2} < a^{\frac{m_1+m_2+2}{n}};$$

съ другой стороны

$$\frac{m_1+m_2}{n} \leqslant x_1+x_2 < \frac{m_1+m_2+2}{n}$$

и, слѣд., $$a^{\frac{m_1+m_2}{n}} \leqslant a^{x_1+x_2} < a^{\frac{m_1+m_2+2}{n}};$$

а такъ какъ $$\text{Пред.}\left(\frac{a^{\frac{m_1+m_2+2}{n}}}{a^{\frac{m_1+m_2}{n}}}\right)_{n\ldots\infty} = \text{Пред.}\left(a^{\frac{2}{n}}\right)_{n\ldots\infty} = 1,$$

числа-же $a^{x_1}.a^{x_2}$ и $a^{x_1+x_2}$ — опредѣленныя постоянныя, то, значитъ, они равны, т. е.

$$a^{x_1}.a^{x_2} = a^{x_1+x_2}.$$

Такъ же докажемъ, что $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$, $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}$; и т. д.

Теперь вернемся къ теоремамъ о предѣлахъ.

65. Лемма. $\text{Пред.}\left[(1+\alpha)^x\right]_{\alpha..o} = 1.$

Дѣйствительно если x есть цѣлое положительное число—напр. n, то

$$\text{Пред.}\left[(1+\alpha)^x\right]_{\alpha..o} = \text{Пред.}\left\{(1+\alpha)^n\right\}_{\alpha..o} =$$

$$= \text{Пред.}\left\{1+\frac{n}{1}\alpha+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2+\ldots+\alpha^n\right\}_{\alpha..o} = 1;$$

а если $x = -m$, гдѣ m — цѣлое положительное, то

$$\text{Пред.}\left\{(1+\alpha)^x\right\}_{\alpha..o} = \text{Пред.}\left\{\frac{1}{(1+\alpha)^m}\right\}_{\alpha..o} = \frac{1}{\text{Пред.}\left\{(1+\alpha)^m\right\}_{\alpha..o}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Предполагая теперь, что x — какое угодно, но только конечное, можемъ заключить его между цѣлыми числами $-m$ и n, при чемъ тогда $(1+\alpha)^x$ будетъ заключаться между $(1+\alpha)^{-m}$ и $(1+\alpha)^n$; а такъ какъ оба эти числа имѣютъ предѣломъ единицу,

то и $$\text{Пред.}\left[(1+\alpha)^x\right]_{\alpha\ldots o} = 1.$$

66. Теорема 8. Предѣлъ степени равенъ предѣлу основанія, возвышенному въ степень, показатель коей есть предѣлъ показателя.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть Пред. $x = a$ и Пред $y = b$, такъ что $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, гдѣ α и β — безк. малы;

тогда Пред. $\left(\frac{x^y}{a^b}\right) =$ Пред. $\left(\frac{(a+\alpha)^{b+\beta}}{a^b}\right) =$ Пред. $\left[\frac{(a+\alpha)^{b+\beta}}{a^{b+\beta}} a^\beta\right] =$

$=$ Пред. $\left[\left(\frac{a+\alpha}{a}\right)^{b+\beta}\right]_{\alpha \dots o}$ Пред. $\left[a^\beta\right]_{\beta \dots o} =$ Пред. $\left[\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^{b+\beta}\right]_{\alpha \dots o} \cdot$ Пред. $\left[a^\beta\right]_{\beta \dots o}$;

но пред. $\left[\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^{b+\beta}\right]_{\beta \dots o} = 1$ по леммѣ 3-й,

а пред. $\left[a^{\beta}\right]_{\beta \dots o} = 1$ на основаніи № 64-го;

слѣд., Пред. $\left(\frac{x^y}{a^b}\right) = 1$, т. е. Пред. $\left(x^y\right) = a^b = \left(\text{Пред. } x\right)^{\text{Пред. } y}$.

Замѣчаніе. Предъидущее доказательство требуетъ, что бы x и y не обращались въ ∞, а въ то же время, что бы пред. $x \neq 0$.

Если x растетъ безгранично, а y всегда > 0, то и x^y растетъ безгранично, ибо тогда можемъ найти такое положительное цѣлое число m, что всегда $y > \frac{1}{m}$ и, слѣд., $x^y > x^{\frac{1}{m}}$, а $x^{\frac{1}{m}}$ растетъ безгранично вмѣстѣ съ x;

если x растетъ безгранично, а y всегда < 0, то

$$\text{Пред. } (x^y) = 0,$$

ибо, полагая $y = -z$, гдѣ уже всегда $z > 0$, имѣемъ:

$$\text{Пред. } \left(x^y\right) = \text{Пред. } \left(x^{-z}\right) = \text{Пред. } \left(\frac{1}{x^z}\right) = \frac{1}{\infty} = 0;$$

наконецъ, если x растетъ безгранично, а y идетъ къ нулю, то получаемъ неопредѣленность, символъ коей есть ∞^0.

Далѣе, если x всегда > 1, а y растетъ до $+\infty$, то и x^y растетъ безгранично, ибо, полагая $x = 1 + z$, гдѣ $z > 0$, и обозначая черезъ n цѣлую часть числа y, такъ что $n \leqslant y < n + 1$, при чемъ n вмѣстѣ съ y растетъ безгранично, получаемъ:

$$x^y > (1+z)^n = 1 + nz + \ldots > nz = \infty;$$

если же x всегда > 1, а y убываетъ до $-\infty$, то, очевидно, пред. $(x^y) = 0$. Наоборотъ, если x всегда < 1, а y растетъ до $+\infty$, то пред. $(x^y) = 0$, а если x всегда < 1, y же убываетъ до $-\infty$, то x^y растетъ безгранично. Когда же x стремится къ 1, а y растетъ до $+\infty$, либо

убываетъ до $-\infty$, то получаемъ неопредѣленность 1^{∞}. (Если x не идетъ къ 1, а всегда равенъ 1, то, очевидно, никакой неопредѣленности не будетъ, ибо $1^{\infty}=1$).

Наконецъ, если x идетъ къ 0, а $y>0$, то Пред. $(x^y)=0$, ибо, положивъ $x=\frac{1}{z}$, получимъ, что z растетъ безгранично и, слѣд.,

$$\text{Пред.}\left(x^y\right)=\text{Пред.}\left[\left(\frac{1}{z}\right)^y\right]=\text{Пред.}\left(\frac{1}{z^y}\right)=\frac{1}{\infty}=0;$$

если x идетъ къ нулю, а $y<0$, то x^y растетъ безгранично; а если x и y оба идутъ къ нулю, то получимъ опять неопредѣленность вида 0^0. (Если y не идетъ къ нулю, а всегда равенъ ему, то, конечно, никакой неопредѣленности не будетъ, а просто $x^0=1$).

67. Теорема. Всякое положительное число b при любомъ положительномъ основаніи a имѣетъ логарифмъ.

Дѣйствительно, предположимъ, напр., что $a>1$; тогда a^x при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ все время растетъ, мѣняясь отъ 0 до $+\infty$. Поэтому, взявъ по произволу цѣлое и положительное число n, всегда найдемъ такое цѣлое же число m, что

$$a^{\frac{m}{n}}\leqslant b\leqslant a^{\frac{m+1}{n}};$$

мѣняя n и подбирая каждый разъ m, построимъ группу чиселъ вида $\frac{m}{n}$, которыя обозначимъ черезъ ν, и группу чиселъ вида $\frac{m+1}{n}$, которыя обозначимъ черезъ N. При этомъ всякое число ν' первой группы меньше каждаго числа N'' второй, ибо $a^{\nu'}<b<a^{N''}$, т. е. $a^{\nu'}<a^{N''}$, а слѣд., и $\nu'<N''$; въ то же время разность соотвѣтственныхъ чиселъ N и ν, равная $\frac{1}{n}$, имѣетъ предѣломъ нуль; значитъ, числа обѣихъ группъ имѣютъ общій предѣлъ напр., c, при чемъ, какъ извѣстно:

$$\frac{m}{n}\leqslant c\leqslant\frac{m+1}{n},$$

откуда слѣдуетъ, что и

$$a^{\frac{m}{n}}\leqslant a^{c}<a^{\frac{m+1}{n}};$$

и такъ какъ

$$a^{\frac{m+1}{n}}\geqslant b\geqslant a^{\frac{m}{n}},$$

то, дѣля послѣднюю строчку на предъидущую, получаемъ:

$$a^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{b}{a^{c}}\geqslant a^{-\frac{1}{n}},$$

а потому $\qquad$ $\text{пред.}\left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{n\ldots\infty} \leqslant a^{\frac{b}{c}} \geqslant \text{пред}\left(a^{-\frac{1}{n}}\right)_{n\ldots\infty}$,

т. е. $$1 \geqslant \frac{b}{a^c} \geqslant 1$$

и, слѣд., $$\frac{b}{a^c} = 1 \text{ или } b = a^c\,,$$

такъ что c есть логариѳмъ числа b при основаніи a.

68. Теорема 9. Предѣлъ логариѳма равенъ логариѳму предѣла.

Дѣйствительно, пусть $y = \lg_a x$, т. е. $x = a^y$,
и въ то же время пред. $x = x_0$, а $y_0 = \lg_a x_0$, т. е. $x_0 = a^{y_0}$,

а слѣд., $$\frac{x}{x_0} = \frac{a^y}{a^{y_0}} = a^{y-y_0}.$$

Такъ какъ величина разности $(a^z - 1)$, при измѣненіи z отъ $-\infty$ до $+\infty$, мѣняется все время въ одномъ направленіи отъ -1 до $+\infty$, обращаясь въ 0 лишь при $z = 0$, то при z не безк.-маломъ эта разность тоже не безк.-мала; поэтому, если y, при подведеніи x къ x_0, не имѣетъ предѣломъ y_0, то $a^{y-y_0} - 1$ будетъ нѣкоторымъ конечнымъ числомъ c, такъ что $a^{y-y_0} - 1 = c$;

и, слѣд., $$\frac{x}{x_0} = 1 + c,$$

откуда $$x = x_0 + cx_0 \quad \text{и} \quad x - x_0 = cx_0,$$

а это противорѣчитъ условію, что $x_0 =$ пред. x.

Значитъ, непремѣнно y идетъ къ y_0,

т. е. $$\text{пред.}\,(\lg x) = \lg x_0 = \lg\,(\text{пред.}\ x).$$

Замѣчаніе. Если $a > 1$, то, какъ извѣстно, $\lg x$ растетъ до $+\infty$ при возрастаніи x до ∞ и убываетъ до $-\infty$ при стремленіи x'а къ нулю; при $a < 1$ будетъ наоборотъ.

69. Теорема 10. Пред. $\operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin}$ Пред. x; Пред. $\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos}$ Пред. x; Пред. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}$ Пред. x; и т. д.

Дѣйствительно, пусть пред. $x = a$, такъ что $x = a + \alpha$, гдѣ α — безк.-мало; тогда

$$\operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin}(a+\alpha) = \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin}\alpha$$

и $$\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos}(a+\alpha) = \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin}\alpha;$$

но извѣстно, что $|\text{Sin}\,\alpha| < |\alpha|$ и, слѣд., Пред. $\text{Sin}\,\alpha'_{\alpha=0} = 0$.

а $\qquad$ Пред. $\left(\text{Cos}\,\alpha\right)_{\alpha=0} =$ Пред. $\left(+\sqrt{1-\text{Sin}^2\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1$;

значитъ, $\qquad$ Пред. $\text{Sin}\,x = \text{Sin}\,a = \text{Sin}$ (Пред. x)

и $\qquad$ Пред. $\text{Cos}\,x = \text{Cos}\,a = \text{Cos}$ (Пред. x)

Послѣ этого, примѣняя теорему о предѣлѣ дроби, докажемъ справедливость остальныхъ, написанныхъ выше, равенствъ, выражающихъ доказываемую теорему; только при этомъ надо замѣтить, что $\text{tg}\,x$ и $\text{Sec}\,x$ обращаются въ $\pm\infty$, когда x подходитъ къ $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, а $\text{Cotg}\,x$ и $\text{Cosec}\,x$ — когда x подходитъ къ $k\pi$, гдѣ k — любое цѣлое число.

70. Теорема 11. $\qquad$ Пред. Arcsin x = Arcsin пред. x,
Пред. Arccos x = Arccos пред. x,
и т. д.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., $y = \text{Arctg}\,x$, т. е. $x = \text{tg}\,y$, а кромѣ того x_0 = пред. x и $y_0 = \text{Arctg}\,x_0$, т. е. $x_0 = \text{tg}\,y_0$;

при достаточномъ подведеніи x къ x_0, оба эти числа будутъ одного знака, а слѣд., $\text{Arctg}\,x$ и $\text{Arctg}\,x_0$ будутъ лежать въ одной и той же четверти, такъ что ихъ разность $y - y_0$ будетъ по абсолютной меньше $\frac{\pi}{2}$; поэтому

$$|y-y_0| < \left|\text{tg}(y-y_0)\right| = \left|\frac{\text{tg}\,y - \text{tg}\,y_0}{1+\text{tg}\,y\cdot\text{tg}\,y_0}\right| = \left|\frac{x-x_0}{1+xx_0}\right|;$$

и такъ какъ, полагая $x = x_0 + \alpha$, имѣемъ $1 + xx_0 = 1 + (x_0 + \alpha)\,x_0 = 1 + x_0^2 + \alpha x_0 \geqslant 1$, такъ что дробь $\frac{x-x_0}{1+xx_0}$ безк.-мала, то и $y - y_0$ безк.-мало, т. е. $\qquad y_0$ есть пред. $(y)_{x=x_0}$

или $\qquad$ пред. $(\text{Arctg}\,x) = \text{Arctg}$ (пред. x).

Послѣ этого имѣемъ, напр., что

$$\text{пред.}\left(\text{Arcsin}\,x\right)_{x=x_0} = \text{пред.}\left(\text{Arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{Arctg}\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} =$$

$$= \text{Arcsin}\,x_0 = \text{Arcsin}\left(\text{пред. } x\right);$$

и т. д.

Такъ же докажемъ прочія равенства; исключеніе составитъ лишь $\text{Arccotg}\,x$ при x, идущемъ къ нулю; именно, какъ извѣстно,

Пред. $(\text{Arccotg}\, x)_{x \to +0} = +\frac{\pi}{2}$, а Пред. $(\text{Arccotg}\, x)_{x \to -0} = -\frac{\pi}{2}$, выраженіе же Arccotg 0 не имѣетъ вовсе смысла.

§ 3. Неперово число е.

71. Неперовымъ числомъ наз. **Пред.** $\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]_{\alpha \to 0}$; обозначаютъ его буквою **е** (произносится, какъ „э"). Докажемъ сначала его существованіе, а потомъ выведемъ формулу для приближеннаго его вычисленія.

Теорема 1. Степень $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при безграничномъ увеличеніи **цѣлаго положительнаго** числа n стремится къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу.

Раскрывая скобки по формулѣ бинома Ньютона, получаемъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\kappa+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\kappa}\left(\frac{1}{n}\right)^\kappa + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\ldots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\,.\,2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots +$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\kappa} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1\,.\,2\ldots n}$$

или еще $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_\kappa + \ldots + u_n \quad \ldots\ldots (1),$$

гдѣ $$u_\kappa = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\kappa} \quad \ldots\ldots (2).$$

Послѣднее выраженіе показываетъ, что каждый членъ второй части, начиная съ u_2, растетъ вмѣстѣ съ n, ибо при этомъ вычитаемыя во множителяхъ его числителя убываютъ; кромѣ того при этомъ растетъ и число членовъ (равное $n+1$); а такъ какъ всѣ они положительны, то, значитъ, растетъ и вся сумма, т. е. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ растетъ вмѣстѣ съ n.

Съ другой стороны, такъ какъ всѣ множители въ числителяхъ членовъ разложенія (1) суть правильныя дроби, то, замѣняя каждую изъ нихъ единицей, мы эту сумму увеличимъ, такъ что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}+\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n};$$

замѣняя теперь на 2 каждый дѣлитель, превышающій 2, мы снова увеличимъ правую часть, такъ что тѣмъ болѣе

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}};$$

наконецъ, продолжая полученную такимъ образомъ геометрическую прогрессію до ∞, мы опять увеличимъ правую часть и такимъ образомъ окончательно находимъ, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\right]=1+\frac{1}{1-{}^1/_2}=3.$$

Итакъ, степень $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ растетъ вмѣстѣ съ n, но не до ∞; значитъ, **она навѣрное имѣетъ предѣлъ; это и есть e.**

72. Теорема 2. Пред. $\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=e$ по какому бы закону α ни подходило къ нулю.

Дѣйствительно, предположимъ сначала, что α остается всегда положительнымъ; тогда дробь $\frac{1}{\alpha}$ растетъ до ∞, и если мы черезъ n обозначимъ ея цѣлую часть, такъ что

$$n\leqslant\frac{1}{\alpha}<n+1,$$

то n будетъ расти до ∞ при приближеніи α къ нулю; съ другой стороны, такъ какъ при этомъ $\frac{1}{n}\geqslant\alpha>\frac{1}{n+1}$,

то $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

и, слѣд., $$\text{Пред.}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n\ldots\infty}\geqslant\text{Пред.}\left\{\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}_{\alpha\ldots 0}\geqslant$$

$$\geqslant\text{Пред.}\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right\}_{n\ldots\infty};$$

но $$\text{Пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}_{n\ldots\infty}=\text{Пред.}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\ldots\infty}=$$

$$=\text{Пред.}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}_{n\ldots\infty}\cdot\text{Пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\ldots\infty}=e,$$

и $$\text{Пред.}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right]_{n\ldots\infty}=\text{Пред.}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right\}_{n+1\ldots\infty}=$$

$$=\frac{\text{Пред.}\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}_{n+1\ldots\infty}}{\text{Пред.}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=e;$$

а слѣд., и $$\text{пред.}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}_{\alpha\ldots o}=e.$$

Пусть теперь α идетъ къ нулю, будучи все время отрицательнымъ; тогда, полагая $\alpha=-x$, при чемъ уже x идетъ къ нулю, будучи все время положительнымъ, находимъ:

$$\text{Пред.}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]_{\alpha\ldots o}=\text{Пред.}\left\{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right\}_{x\ldots o}=$$

$$=\text{Пред.}\left\{\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{x}}}\right\}_{x\ldots o}=\text{Пред.}\left\{\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}\right\}_{x\ldots o};$$

но такъ какъ $\frac{1}{1-x}>1$, то положимъ $\frac{1}{1-x}=1+z$; тогда, во-первыхъ, z идетъ къ нулю одновременно съ x, будучи все время положительнымъ; а во-вторыхъ, $1-x=\frac{1}{1+z}$ и, слѣд., $x=1-\frac{1}{1+z}=\frac{z}{1+z}$,

а потому $$\text{Пред.}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]_{\alpha\ldots o}=\text{Пред.}\left\{(1+z)^{\frac{1+z}{z}}\right\}_{z\ldots o}=$$

$$=\text{Пред.}\left\{\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{1+z}\right\}_{z\ldots o}=e^{1}=e.$$

73. Вычислять число **e**, пользуясь формулой бинома Ньютона, нельзя, потому что мы при этомъ подходили бы къ e все время съ меньшей стороны и, слѣд., не могли бы судить о величинѣ отклоненія вычисленнаго значенія — отъ истиннаго; кромѣ того этотъ пріемъ былъ бы чрезвычайно копотнымъ. Что бы получить формулу для быстраго вычисленія e съ желаемой степенью точности, мы перейдемъ къ предѣлу въ найденномъ выше разложеніи (1)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n+1}\quad\ldots\quad(1);$$

но только, такъ какъ въ правой части число членовъ растетъ до ∞ вмѣстѣ съ n, такъ что непосредственно теорему о предѣлѣ суммы примѣнить нельзя, то сначала напишемъ ее такъ, что бы число ея слагаемыхъ было конечнымъ, для чего сумму всѣхъ членовъ, начиная съ $(k+2)$'го, обозначимъ одной буквой $\omega_{n,k}$, тогда получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+u_1+u_2+\ldots+u_k+\omega_{n,k} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

гдѣ
$$\omega_{n,k} = u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{n+1} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Изъ равенства (3) имѣемъ, что

$$\omega_{n,k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left\{1+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_k\right\};$$

и такъ какъ всѣ члены правой части имѣютъ предѣлы при $n \ldots \infty$, то, значитъ, имѣетъ при этомъ предѣлъ и само $\omega_{n,k}$; обозначая его черезъ ω_k и переходя въ равенствѣ (3) къ предѣлу—при $n = \infty$, получаемъ,

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots k}+\omega_k \ldots (5),$$

ибо изъ выраженія (2) видно, что пред. $(u_{n,k})_{n\ldots\infty} = \frac{1}{1.2.3\ldots k}$.

Остается лишь опредѣлить границы между которыми заключается такъ наз. поправочный членъ ω_k. Съ этой цѣлью замѣтимъ, что такъ какъ всѣ члены въ выраженіи (4) для $\omega_{n,k}$ положительны и такъ какъ каждый изъ нихъ, а равно и ихъ число, растутъ, какъ выяснено выше, вмѣстѣ съ n, то, значитъ, тѣмъ болѣе $\omega_k > 0$.

Съ другой стороны замѣняя единицей всѣ разности, стоящія въ числителяхъ членовъ выраженія (4), получаемъ:

$$\omega_{n,k} < \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)(k+2)} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n};$$

замѣна здѣсь дѣлителей $(k+2)$, $(k+3)$, $\cdots$ меньшимъ числомъ $k+1$ снова увеличитъ правую часть, такъ что

$$\omega_{n,k} < \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)^2} + \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)^3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)^{n-k}}$$

и тѣмъ болѣе

$$\omega_{n,k} < \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)^2} + \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)^3} + \ldots \text{(до } \infty)$$

т. е. $$\omega_{n,k} < \frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)}\left[1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{1.2.3\ldots k(k+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}$$

или $$\omega_{n,k} < \frac{1}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{k},$$

а слѣд., и пред. $\left(\omega_{n,k}\right)_{n\ldots\infty}$, т. е. $\omega_k \leqslant \frac{1}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{k}$.

Итакъ $$0<\omega_k\leqslant\frac{1}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{k};$$

значитъ, можемъ написать, что

$$\omega_k=\frac{1}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{\theta_k}{k} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

гдѣ $0<\theta_k\leqslant 1$, т. е. θ_k -правильная положительная дробь, при чемъ ея величина зависитъ отъ числа k.

Имѣя выраженія (5) и (6), можемъ вычислить e съ любой точностью; найдемъ, напр., семь первыхъ знаковъ. Такъ какъ ошибка должна быть при этомъ не больше $\frac{1}{10^7}$, а она получается отъ неточности въ десятичныхъ выраженіяхъ всѣхъ членовъ суммы (5), начиная съ 4-го, и отъ отбрасыванія ω_k, то возмемъ k такъ, чтобы имѣть

$$\omega_k<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7} \text{ или } \frac{1}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{k}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}.$$

т. е. $$(1.2.3\ldots k)\,k > 2.10^7;$$

непосредственно находимъ, что это будетъ при k 10; принимая поэтому во вниманіе первые 11 членовъ разложенія (5) и вычисляя каждый изъ нихъ съ **8** десятичными знаками, получаемъ:

1,000 0000 0
1,000 0000 0
0,500 0000 0
0,166 6666 7
0,041 6666 7
0,008 3333 3
0,001 3888 9
0,000 1984 1
0,000 0248 0
0,000 0027 6
0,000 002 8

2,718 2818 1

Болѣе точное значеніе e таково:

2,71828 18284 59045 23566...

74. Теорема. Неперово число e несоизмѣримо.

Дѣйствительно, допустимъ, что оно соизмѣримо—именно: $e = \frac{p}{m}$, гдѣ p и m—цѣлыя, взаимно-простыя, числа, причемъ m навѣрно больше 1, ибо $e \gtrless \frac{2}{3}$. Тогда, беря въ формулахъ (5) и (6) $k = m$ получимъ

$$\frac{p}{m} = e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots m} + \frac{1}{1.2.3\dots m} \cdot \frac{\theta_m}{m};$$

умножая обѣ части этого равенства на $1.2.3\dots m$ и перенося всѣ члены правой части, кромѣ послѣдняго, въ лѣвую, получимъ:

$$p\,(m-1)! - 1.2.3\dots m - 2.3.4\dots m - 3.4\dots m - 4\dots m - \dots$$
$$- (m-1)m - m - 1 = \frac{\theta_m}{m};$$

лѣвая часть этого равенства представляетъ число цѣлое либо нуль, тогда какъ въ правой имѣемъ правильную дробь и навѣрно не нуль, ибо $\theta_m > 0$; такое равенство невозможно, а слѣд., и предположеніе, что e—соизмѣримо, ошибочно.

Изъ теоремы этой между прочимъ вытекаетъ, что θ_k ни при какомъ m не можетъ равняться 1, а, значитъ, **всегда $0 < \theta_k < 1$.**

75. Логарифмы чиселъ, взятые при основаніи e, наз. натуральными или гиперболическими, а также Неперовыми и обозначаются обыкновенно буквой L или l; а взятые при основаніи, равномъ 10, наз. обыкновенными или Бригговыми. Тѣ и другіе тѣсно связаны между собой; въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$log_b N = x,$$

такъ что

$$N = b^x.$$

Логарифмируя это равенство при основаніи a, получаемъ.

$$lg_a N = x\, lg_a b = lg_a b \cdot lg_b N,$$

откуда

$$lg_b N = \frac{1}{lg_a b} \cdot lg_b N$$

Такимъ образомъ логарифмъ числа при новомъ основаніи получается умноженіемъ его логарифма при старомъ основаніи на постоянный множитель $\frac{1}{lg_a b}$, рав-

ный единицѣ, дѣленной на логарифмъ новаго основанія въ старой системѣ: этотъ множитель наз. **модулемъ** новой системы логарифмовъ относительно старой. Модуль по отношенію къ неперовымъ логарифмамъ наз. абсолютнымъ; абсолютный модуль обыкновенныхъ логарифмовъ обозначается часто буквой M; онъ равенъ $\frac{1}{l10} = Log_{10}\ 2{,}7182818\cdots = 0{,}434\ 2945\ldots$

Неперовы логарифмы обладаютъ между прочимъ тѣмъ свойствомъ,

что
$$\text{Пред.}\left[\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}\right]_{\alpha=o} = 1,$$

ибо
$$\text{Пред.}\left[\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}\right]_{\alpha=o} = \text{Пред.}\left\{l\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\right\}_{\alpha=o} =$$
$$= l\left\{\text{Пред.}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]_{\alpha=o}\right\} = le = 1;$$

Это свойство весьма выгодно въ аналитическихъ изслѣдованіяхъ, что и побудило Непера—перваго, напавшаго на идею о логарифмахъ—вычислить его таблицу логарифмовъ именно при основаніи e, не смотря на несоизмѣримость этого числа.

§ 4. Непрерывныя дроби.

76. Опредѣленіе. Ариѳметической непрерывной дробью наз. выраженіе вида

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cdots}}}$$

въ которомъ такъ наз. **частные знаменатели** $q_1, q_2, q_3, q_4\ldots$ суть цѣлыя, положительныя числа; если число этихъ знаменателей конечно, то и дробь наз. конечной, въ противномъ же случаѣ—безконечною.

77. Конечная непрерывная дробь можетъ быть обращена въ обыкновенную раціональную дробь—для этого надо лишь совершить послѣдовательно всѣ указанныя дѣйствія, начиная съ послѣдняго; напр.,

$$2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3\frac{1}{4}}} = 2 + \cfrac{1}{5 + \frac{4}{13}} = 2 + \cfrac{1}{5\frac{4}{13}} = 2 + \frac{13}{69} = \frac{151}{69}$$

Обратно, всякая раціональная дробь можетъ быть превращена въ непрерывную; напр.,

$$\frac{41}{12} = 3 + \frac{5}{12} = 3 + \frac{1}{\left(\frac{12}{5}\right)} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}};$$

при этомъ ясно, что получаемая непрерывная дробь будетъ конечною, ибо послѣдовательные остатки, постепенно убывая по меньшей мѣрѣ на единицу, должны рано или поздно уменьшиться до 1.

78. Опредѣленіе. Если непрерывную дробь оборвемъ на частномъ знаменателѣ q_n и полученную дробь

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

обратимъ въ обыкновенную дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то послѣдняя наз. **n'ою подходящей дробью.**

79. Законъ составленія подходящихъ дробей: числитель n'ой подходящей дроби равенъ произведенію числителя предъидущей дроби на соотвѣтственный частный знаменатель, сложенному съ числителемъ предъ-предъидущей дроби; такъ же образуется и знаменатель, т. е.

$$P_n = P_{n-1} \cdot q_n + P_{n-2}, \quad Q_n = Q_{n-1} \cdot q_n + Q_{n-2} \quad \ldots \quad (1).$$

Дѣйствительно, во-первыхъ, непосредственно находимъ, что

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2};$$

и такъ какъ

$$\frac{P_3}{Q_3} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}},$$

т. е. $\frac{P_3}{Q_3}$ получается изъ $\frac{P_2}{Q_2}$ замѣною q_2 на $q_2 + \frac{1}{q_3}$, то слѣд.,

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{q_1\left(q_2+\frac{1}{q_3}\right)+1}{q_2+\frac{1}{q_3}}=\frac{q_1 q_2 q_3+q_1+q_3}{q_2 q_3+1}=\frac{(q_1 q_2+1)\, q_3+q_1}{q_2 q_3+1}=\frac{P_2 q_3+P_1}{Q_2 q_3+Q_1},$$

т. е. указанный законъ справедливъ для третьей подходящей дроби; поэтому остается лишь показать, что если онъ вѣренъ для n'ой дроби то будетъ вѣренъ и для $(n+1)$'ой.

Допустимъ же, что равенства (1) существуютъ,

такъ что
$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}\cdot q_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}\cdot q_n+Q_{n-2}};$$

такъ какъ
$$\frac{P_n}{Q_n}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}$$

и
$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots+\cfrac{1}{q_n+\cfrac{1}{q_{n+1}}}}}$$

т. е. $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ получается изъ $\frac{P_n}{Q_n}$ замѣною q_n на $q_n+\frac{1}{q_{n+1}}$, то, слѣд.,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}\left(q_n+\frac{1}{q_{n+1}}\right)+P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(q_n+\frac{1}{q_{n+1}}\right)+Q_{n-2}}=\frac{P_{n-1}\, q_n q_{n+1}+P_{n-1}+P_{n-2}\, q_{n+1}}{Q_{n-1}\, q_n q_{n+1}+Q_{n-1}+Q_{n-2}\, q_{n+1}}=$$

$$=\frac{(P_{n-1}\, q_n+P_{n-2})\, q_{n+1}+P_{n-1}}{(Q_{n-1}\, q_n+Q_{n-2})\, q_{n+1}+Q_{n-1}}=\frac{P_n\, q_{n+1}+P_{n-1}}{Q_n\, q_{n+1}+Q_{n-1}}.$$

Слѣдствіе. Если непрерывная дробь безконечна, то P_n и Q_n растутъ безгранично вмѣстѣ съ n.

Примѣръ. Найти величину дроби:

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$$

Вычисленія располагаемъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

q_n	3	2	5	1	3	2
$\frac{P_n}{Q_n}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{38}{11}$	$\frac{45}{13}$	$\frac{173}{50}$	$\frac{391}{113}$

при чемъ двѣ первыхъ дроби $\frac{3}{1}$ и $\frac{7}{2}$ вычисляемъ непосредственно, а остальныя -по изложенному закону.

80. Теорема I *Разность между двумя смежными подходящими дробями равна ±1, дѣленной на произведеніе ихъ знаменателей.*

Дѣйствительно, имѣемъ

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}};$$

но $\quad P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = (P_n q_{n+1} + P_{n-1}) Q_n -$

$- P_n (Q_n q_{n+1} + Q_{n-1}) = P_n Q_n q_{n+1} + P_{n-1} Q_n - P_n Q_n q_{n+1} -$

$$- P_n Q_{n-1} = P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1}.$$

т. е. $\quad P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = -(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)$;

точно такъ же $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = -(P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1})$,

а слѣд., $\quad P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = (-1)^2 (P_{n-1} Q_{n-2} -$

$$- P_{n-2} Q_{n-1}); \text{ и т. д.;}$$

наконецъ $\quad P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = (-1)^{n-1} (P_2 Q_1 - P_1 Q_2)$

$$= (-1)^{n-1} \left[(q_1 q_2 + 1) 1 - q_1 \cdot q_2\right] = (-1)^{n-1}$$

или $\quad \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{Q}_n - \mathbf{P}_n \mathbf{Q}_{n+1} = (-1)^{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$

а потому $\quad \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \dfrac{P_n}{Q_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}.$

Слѣдствіе 1. *Разность двухъ смежныхъ подходящихъ дробей идетъ къ нулю при увеличеніи ихъ номера до ∞.*

Слѣдствіе 2. *Всякая подходящая дробь четнаго порядка больше слѣдующей за ней дроби нечетнаго по*

рядка, ибо если n — четное, то $n+1$ нечетное и, значитъ, на основанiи (2):

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} < 0, \text{ т. е. } \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} < \frac{P_n}{Q_n}.$$

81 Теорема II. Подходящiя дроби несократимы

Въ самомъ дѣлѣ, если бы, напр., P_n и Q_n дѣлились на какое либо число a, то изъ равенства

$$P_{n+1}Q_n - P_n Q_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

слѣдовало бы, что и 1 дѣлится на a, что невозможно.

82. Теорема III. Подходящiя дроби нечетныхъ порядковъ постепенно растутъ, а четныхъ — убываютъ.

Дѣйствительно,

$$\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+2}Q_n - Q_{n+2}P_n}{Q_{n+2}\cdot Q_n} =$$

$$= \frac{(P_{n+1}\cdot q_{n+2} + P_n)\,Q_n - (Q_{n+1}\cdot q_{n+2} + Q_n)\,P_n}{Q_{n+2}\cdot Q_n} =$$

$$= \frac{(P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n)\,q_{n+2}}{Q_{n+2}\cdot Q_n}$$

или, на основанiи (2):

$$\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{q_{n+2}}{Q_n Q_{n+2}};$$

и такъ какъ q_{n+2}, Q_n и Q_{n+2} — положительны, то отсюда и видимъ, что $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} - \frac{P_n}{Q_n} > 0$, т. е. $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} > \frac{P_n}{Q_n}$ при n нечетномъ

и $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} - \frac{P_n}{Q_n} < 0$, т. е. $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} < \frac{P_n}{Q_n}$ при n — четномъ.

83 Теорема IV. Всякая подходящая дробь нечетнаго порядка — напр., $\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$ меньше любой подходящей дроби четнаго порядка — напр., меньше дроби $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$.

Дѣйствительно, если $m < n$, то по предъидущей теоремѣ имѣемъ, что

$$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

а въ свою очередь (№ 80) $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$;

слѣд., и $\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$.

Если же, наоборотъ, $m > n$, то

$$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} < \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} \text{ и } \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}},$$

откуда опять $\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$.

84. Теорема V. Всякая безконечная непрерывная дробь выражаетъ нѣкоторое опредѣленное ирраціональное число.

Въ самомъ дѣлѣ мы нашли, что: 1) всякая подходящая дробь нечетнаго порядка меньше любой дроби четнаго порядка; и 2) разность соотвѣтственныхъ (смежныхъ) дробей идетъ постепенно къ нулю. Слѣд., (№ 54) тѣ и другія дроби имѣютъ общій предѣлъ x; его то и принимаютъ за величину разсматриваемой безконечной непрерывной дроби, при чемъ, какъ мы знаемъ (№ 54), x больше всякой подходящей дроби нечетнаго порядка и меньше любой дроби четнаго порядка.

Кромѣ того изъ № 77 слѣдуетъ, что x — число ирраціональное.

85. Теорема VI. Подходящая дробь тѣмъ ближе къ непрерывной, чѣмъ ея нумеръ выше.

Пусть $x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1} + \ldots}}}}$

полагая $$q = \cfrac{1}{q_{n+2} + \cfrac{1}{q_{n+3} + \dots}},$$

можемъ написать, что $$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1} + q}}}},$$

а такъ какъ $$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}}$$

то, значитъ, x получается изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ замѣною q_{n+1} на $q_{n+1} + q$.

так что $$x = \frac{P_n(q_{n+1} + q) + P_{n-1}}{Q_n(q_{n+1} + q) + Q_{n-1}} = \frac{P_n q_{n+1} + P_{n-1} + q P_n}{Q_n q_{n+1} + Q_{n-1} + q Q_n} =$$
$$= \frac{P_{n+1} + q P_n}{Q_{n+1} + q Q_n}.$$

Поэтому

$$\frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1} + q P_n}{Q_{n+1} + q Q_n} = \frac{P_n(Q_{n+1} + q Q_n) - Q_n(P_{n+1} + q P_n)}{Q_n(Q_{n+1} + q Q_n)} =$$
$$= -\frac{P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1}}{Q_n(Q_{n+1} + q Q_n)} = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_{n+1} + q Q_n)} \quad \dots\dots (3)$$

и $$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - x = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_{n+1} + q P_n}{Q_{n+1} + q Q_n} =$$
$$= \frac{P_{n+1}(Q_{n+1} + q Q_n) - Q_{n+1}(P_{n+1} + q P_n)}{Q_{n+1}(Q_{n+1} + q Q_n)} = \frac{q(P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1})}{Q_{n+1}(Q_{n+1} + q Q_n)} =$$
$$= q \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{Q_{n+1}(Q_{n+1} + q Q_n)};$$

и такъ какъ $Q_{n+1} > Q_n$, а число q — правильная дробь, то, слѣд.,

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - x \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - x \right|.$$

86. Теорема VII. Если n'ую подходящую дробь примемъ за непрерывную, то дѣлаемая при этомъ ошибка δ_n по

абсолютной величинѣ будетъ меньше 1, дѣленной на произведенія знаменателя этой дроби—на сумму его и предъидущаго знаменателя:

$$\delta_n < \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Дѣйствительно, мы нашли, что

$$\frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_{n+1} + q\,Q_n)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

т. е. $$\frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{(-1)^n}{Q_n\,[\,(Q_n\,q_{n+1} + Q_{n-1}) + q\,Q_n]}\;;$$

отсюда, принявъ во вниманіе, что $q > 0$ и $q_{n+1} \geqslant 1$, мы и получаемъ неравенство (4).

Задача. Обратить $\sqrt{11}$ въ непрерывную дробь.

Такъ какъ $\sqrt{11}$ больше 3, но меньше 4, то можемъ написать,

что $$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{x}, \text{ гдѣ } x > 1;$$

отсюда $$\frac{1}{x} = \sqrt{11} - 3,\; x = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} = \frac{\sqrt{11} + 3}{11 - 9} = \frac{\sqrt{11} + 3}{2};$$

т. е. x больше 3, но меньше 4; поэтому опять пишемъ, что

$$x = 3 + \frac{1}{y}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sqrt{11} + 3}{2} = 3 + \frac{1}{y},$$

откуда $$\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{11} + 3}{2} - 3 = \frac{\sqrt{11} - 3}{2},\; y = \frac{2}{\sqrt{11} - 3} = \frac{2(\sqrt{11} + 3)}{11 - 9} =$$

$$= \sqrt{11} + 3 = 6 + \frac{1}{y},$$

и т. д.;

значитъ, $$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}}$$

поэтому

q_n	1	3	6	3	6
P_n	3	10	63	199	1257
Q_n	1	3	19	60	379

,

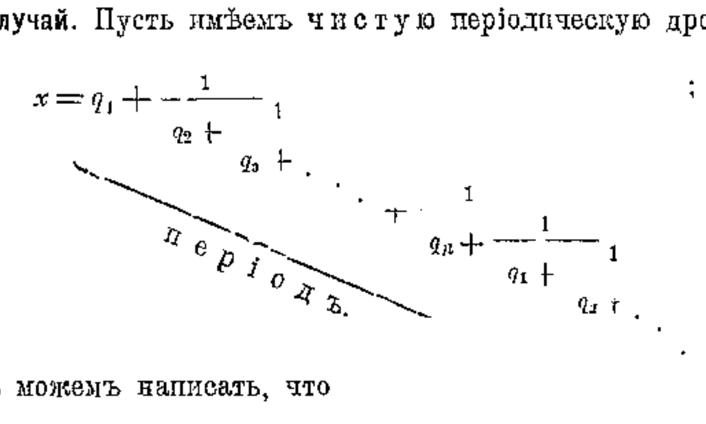
беря, напр., $\sqrt{11}=\frac{199}{60}$ сдѣлаемъ ошибку $< \frac{1}{60\,(60+19)} = \frac{1}{4740}$, такъ что

$$\sqrt{11}=3{,}3167.$$

87 Опредѣленіе. Безконечная непрерывная дробь наз. **періодической**, если ея частные знаменатели, **начиная съ нѣкотораго**, повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ; если періодъ начинается съ перваго же частнаго знаменателя, то дробь наз. **чистой** періодической, въ противномъ же случаѣ — **смѣшанной**.

Теорема. Всякая періодическая непрерывная дробь выражаетъ **положительный** корень нѣкотораго квадратнаго ур-нія.

1-й случай. Пусть имѣемъ чистую періодическую дробь.



такъ какъ можемъ написать, что

$$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{x}}}},$$

то, слѣд., x получается изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ замѣною q_{n+1} на x, т. е.

$$x = \frac{P_n\, x + P_{n-1}}{Q_n\, x + Q_{n-1}},$$

откуда $$Q_n x^2 + Q_{n-1} x = P_n x + P_{n-1}$$

и, слѣд., x удовлетворяетъ квадратному ур—нію

$$Q_n x^2 + (Q_{n-1} - P_n)\, x - P_{n-1} = 0.$$

2-й случай. Имѣемъ смѣшанную періодическую непрерывную дробь:

$$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_m + \cfrac{1}{\underbrace{q_{m+1} + \cfrac{1}{q_{m+2} + \dots + \cfrac{1}{q_{m+n}}}}_{\text{періодъ}} + \cfrac{1}{q_{m+1} + \dots}}}}}$$

тогда, полагая

$$y = q_{m+1} + \cfrac{1}{q_{m+2} + \cfrac{1}{q_{m+3} + \dots + \cfrac{1}{q_{m+n} + \cfrac{1}{q_{m+1} + \dots}}}},$$

имѣемъ, во-первыхъ, что y удовлетворяетъ нѣкоторому уравненію

$$ay^2 + by + c = 0,$$

а во-вторыхъ, что $x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_m + \cfrac{1}{y}}}}$

и, слѣд., $$x = \frac{P_m y + P_{m-1}}{Q_m y + Q_{m-1}},$$

откуда $$Q_m xy + Q_{m-1} x = P_m y + P_{m-1}$$

или $$(Q_m x - P_m) y = P_{m-1} - Q_{m-1} x$$

и, значитъ, $$y = \frac{P_{m-1} - Q_{m-1} x}{Q_m x - P_m},$$

такъ что x должно удовлетворять ур—нію

$$a\left(\frac{P_{m-1} - Q_{m-1}\,x}{Q_m\,x - P_m}\right)^2 + b\,\frac{P_{m-1} - Q_{m-1}\,x}{Q_m\,x - P_m} + c = 0$$

или

$$(a\,Q^2_{m-1} - b\,Q_{m-1}\,Q_m + c\,Q^2_m)\,x^2 - (2a\,P_{m-1}\,Q_{m-1} -$$

$$- b\,P_{m-1}\,Q_m - b\,P_m\,Q_{m-1} + 2c\,P_m\,Q_m)\,x +$$

$$+ (a\,P^2_{m-1} - b\,P_{m-1}\,P_m + c\,P^2_m) = 0.$$

88. На частномъ примѣрѣ въ № 86-мъ мы видѣли, что корень квадратный изъ раціональнаго числа обращается въ періодическую непрерывную дробь; можно доказать, что такъ будетъ вообще, но такъ какъ доказательство сложно, то мы его опустимъ.

89. Непрерывныя дроби примѣняются въ тѣхъ случаяхъ, когда надо вычислить приближенно какую либо величину. Для практики укажемъ одно изъ такихъ примѣненій.

Примѣръ Найти $lg_{10}\,2$.

Такъ какъ $10^0 = 1 < 2$, а $10^1 = 10 > 2$, то $lg_{10}\,2 = \frac{1}{x}$,

гдѣ $x > 1$; при этомъ $10^{\frac{1}{x}} = 2$, откуда $2^x = 10$;

и такъ какъ $2^3 = 8 < 10$, а $2^4 = 16 > 10$, то, значитъ,

$$lg_{10}\,2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{y}}, \text{ гдѣ } y > 1;$$

слѣд., $10 = 2^{3 + \frac{1}{y}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{y}} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{y}}$,

откуда $2^{\frac{1}{y}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, а потому $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^y$;

такъ какъ $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$, а $\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} > 2$, то $y = 3 + \frac{1}{z}$

и, значитъ, $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3 + \frac{1}{z}} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z}} = \frac{125}{64} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z}}$,

откуда $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z}} = \frac{128}{125}$, а $\frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^z$;

въ свою очередь $\left(\frac{128}{125}\right)^9 < \frac{5}{4}$, а $\left(\frac{128}{125}\right)^{10} > \frac{5}{4}$, такъ что $z = 9 + \frac{1}{u}$,
и т. д., . . .

Значитъ, $$lg_{10} 2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \dots}}},$$

откуда приближенное значеніе $lg_{10} 2$ будетъ равно $\frac{28}{93}$, при чемъ ошибка меньше $\frac{1}{93\,(93+10)} = \frac{1}{9579}$, такъ что $lg_{10}\ 2 = 0,3010\dots$.

ГЛАВА IV.

Безконечно—малыя величины.

90 Различныя, входящія въ вопросъ, безк.—малыя, какъ и всѣ перемѣнныя вообще, могутъ быть либо независимыми другъ отъ друга, либо зависящими; въ первомъ случаѣ, конечно, нѣтъ никакой связи между быстротой ихъ убыванія, во второмъ же такая связь существуетъ—напр., α^5 идетъ къ нулю вмѣстѣ съ α, но гораздо быстрѣе, какъ это видно изъ слѣдующей таблицы:

$$\alpha - \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{10};\quad \frac{1}{100}\quad ,\dots$$

$$\alpha^5\quad \frac{1}{32},\ \frac{1}{243},\ \frac{1}{1024};\ \frac{1}{3125};\ \frac{1}{100\,000};\ \frac{1}{10\,000\,000\,000};\dots$$

Такъ какъ при пользованіи безк.-малыми важнѣе всего именно быстрота ихъ стремленія къ нулю, то ихъ дѣлятъ по степени этой быстроты на „порядки".

Опредѣленіе 1. Порядкомъ одночлена $A\alpha^m$, въ которомъ A—конечное число, не равное нулю, наз. показатель его измѣренія; очевидно, что при этомъ, чѣмъ порядокъ безк.-малой выше, тѣмъ она убываетъ быстрѣе.

Чтобы распространить понятіе о порядкѣ и на безк.-малыя болѣе сложнаго вида, установимъ еще слѣдующее

Опредѣленіе 2. Безк.-малыя β и γ имѣютъ одинаковый порядокъ малости, если ихъ отношеніе есть число **конечное, т. е. не растетъ безгранично и не безк.-мало.**

Слѣдствіе 1. Если **предѣлъ** отношенія двухъ безк.-малыхъ не равенъ нулю, то ихъ порядки одинаковы, ибо изъ равенства

$$\text{Пред. } \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) = A \neq 0$$

слѣдуетъ, что $\frac{\gamma}{\beta} = A + \varepsilon$, гдѣ ε — безк.-мало; а, значитъ, само отношеніе $\frac{\gamma}{\beta}$ есть число конечное.

Слѣдствіе 2. Если отношеніе безк. малой β къ α^n есть число **конечное**, то порядокъ β относительно α равенъ n.

Слѣдствіе 3. Если **предѣлъ** отношенія $\frac{\beta}{\alpha^n}$ не равенъ нулю, то порядокъ β относительно α равенъ n.

Такъ какъ оказывается, что не у всякой безк.-малой порядокъ можно выразить опредѣленнымъ числомъ, то введемъ еще

Опредѣленіе 3. Если отношеніе $\frac{\gamma}{\beta}$ само безк. мало, то порядокъ γ выше порядка β, ибо, значитъ, γ убываетъ быстрѣе, чѣмъ β.

Слѣдствіе. Если отношеніе $\frac{\gamma}{\beta}=\infty$, то порядокъ γ ниже порядка β, ибо тогда, очевидно, $\frac{\beta}{\gamma}=$ безк. малой, такъ что порядокъ β выше порядка γ.

91. Теорема. Безк.-малая величина не можетъ имѣть нѣсколькихъ порядковъ по отношенію **къ одной и той же „основной“** безк.-малой α.

Дѣйствительно, пусть β — n'го порядка, т. е.

$$\frac{\beta}{\alpha^n}=B,$$

при чемъ B — число конечное;

тогда $$\frac{\beta}{\alpha^m}=B\alpha^{n-m},$$

такъ что при $m<n$ получимъ:

$$\frac{\beta}{\alpha^m}=\text{безк.-малой},$$

а при $m>n$ будемъ имѣть, что $\frac{\beta}{\alpha^m}=\infty$;

значитъ, никакое другое число, кромѣ n, не можетъ выразить порядка β относительно α.

92. Теорема. Безк.-малая нулеваго порядка есть величина конечная, такъ какъ если $\frac{\beta}{\alpha^0}=B$, то $\beta=B$, ибо $\alpha^0=1$.

Обратно, всякое **конечное** число B можно трактовать, какъ безк.-малую **нулеваго** порядка, ибо вслѣдствіе равенства $\alpha^0=1$, будемъ имѣть, что $\frac{B}{\alpha^0}=B=$ числу конечному.

93. Теорема. Безк.-малая отрицательнаго порядка представляетъ величину безк.-большую, такъ какъ если

$$\frac{\beta}{\alpha^{-m}} = \text{B, т. е. } \alpha^m \cdot \beta = \text{Б, то, значитъ, } \beta = \infty,$$

ибо иначе $\alpha^m \cdot \beta$ было бы величиной безк.-малой.

На этомъ основанiи и безк.-большiя величины дѣлятъ на порядки, устанавливая слѣдующее

Опредѣленiе 4. Порядокъ безконечности β равенъ m, когда произведенiе $\alpha^m \cdot \beta$ есть число **конечное**.

94. Опредѣленiе 5. Эквивалентными безк.-малыми наз. такiя, **предѣлъ** отношенiя коихъ равенъ 1.

Слѣдствiе 1. Эквивалентныя безк.-малыя имѣютъ одинаковый порядокъ.

Слѣдствiе 2. Разность двухъ эквивалентныхъ безк.-малыхъ имѣетъ **высшiй** порядокъ, чѣмъ каждая изъ нихъ, ибо изъ равенства: $\frac{\gamma}{\beta} = 1 + \varepsilon$,

получаемъ: $\gamma = \beta + \beta\varepsilon$ и, слѣд., $\gamma - \beta = \beta\varepsilon$,

а потому $\frac{\gamma - \beta}{\beta} = \varepsilon =$ безк.-малой.

Теорема обратная. Если порядокъ разности двухъ безк. малыхъ выше порядка какой-либо изъ нихъ, то онѣ эквивалентны, ибо, если, напр., $\frac{\gamma - \beta}{\beta} = \varepsilon =$ безк. малой,

то $\frac{\gamma}{\beta} - 1 = \varepsilon$ или $\frac{\gamma}{\beta} = 1 + \varepsilon$

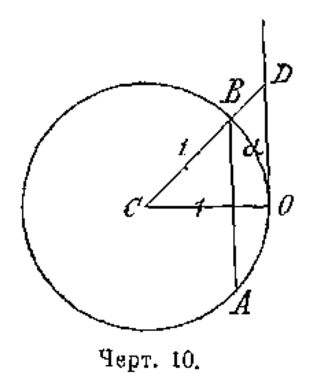
и, слѣд. Пред. $\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) = 1$.

95. Опредѣленiе 6. Главнымъ значенiемъ безк.-малой наз. эквивалентный ей одночленъ вида $\text{B}\alpha^n$, гдѣ B — число постоянное. Очевидно, что если β — n'го порядка относительно α, причемъ Пред $\left(\frac{\beta}{\alpha^n}\right) = \text{Б}$,

то $\text{B}\alpha^n$ и есть главное значенiе β, ибо тогда

$$\text{Пред.} \left(\frac{\beta}{\text{B}\alpha^n}\right) = 1.$$

Такимъ образомъ, чтобы найти главное значенiе безк.-малой β, надо сначала опредѣлить ея порядокъ n, а затѣмъ найти Пред. $\left(\frac{\beta}{\alpha^n}\right)$.



Черт. 10.

Примѣръ 1. Sin безк.-малой дуги, **выраженной въ радіанахъ**, эквивалентенъ самой дугѣ.

Предположимъ сначала, что α положительно.

Тогда $AB < \smile \bar{A}OB$, т. е. $2\ \mathrm{Sin}\,\alpha < 2\alpha$

или $\mathrm{Sin}\,\alpha < \alpha$;

съ другой стороны

площадь сектора $COB <$ площади $\triangle COD$,

т. е. $\frac{1 \cdot \alpha}{2} < \frac{1 \cdot \mathrm{tg}\alpha}{2}$ или $\alpha < \mathrm{tg}\,\alpha$;

значитъ, $\mathrm{Sin} < \alpha < \mathrm{tg}\,\alpha$, откуда $1 < \frac{\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha} < \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\alpha}$,

а слѣд., $1 \leqslant \text{Пред.}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_{\alpha...o} \leqslant \text{Пред.}\left(\frac{1}{\mathrm{Cos}\,\alpha}\right)_{\alpha..o}$, т. е. $\text{Пред.}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_{\alpha..o} = 1$.

Если α отрицательно, то, положивъ $\alpha = -\beta$, гдѣ уже β — положительно, получимъ на основаніи перваго случая, что

$$\text{Пред.}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_{\alpha..o} = \text{Пред.}\left(\frac{-\beta}{\mathrm{Sin}\,(-\beta)}\right)_{\beta..o} = \text{Пред.}\left(\frac{-\beta}{-\mathrm{Sin}\,\beta}\right)_{\beta..o} =$$

$$= \text{Пред.}\left(\frac{\beta}{\mathrm{Sin}\,\beta}\right)_{\beta..o} = 1.$$

Слѣдствіе. Безк.-малая дуга, выраженная въ радіанахъ, эквивалентна своему тангенсу, ибо

$$\text{Пред.}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)_{\alpha..o} = \text{Пред.}\left(\frac{\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_{\alpha..o} = \text{Пред.}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_{\alpha..o} \cdot \text{Пред.}\Big(\mathrm{Cos}\,\alpha\Big)_{\alpha..o} = 1.$$

Прим. 2. Неперовъ логарифмъ двучлена $(1 + \alpha)$ при α безк.-маломъ эквивалентенъ самому α, ибо имѣемъ, что

$$\text{Пред.}\left[\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}\right]_{\alpha...o} = \text{Пред.}\left\{l\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\right\}_{\alpha...o} =$$

$$= l\left\{\text{Пред.}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]_{\alpha...o}\right\} = le = 1.$$

96. Докажемъ теперь нѣсколько теоремъ о порядкахъ.

Теорема I. Порядокъ **арифметической** суммы равенъ меньшему изъ порядковъ слагаемыхъ.

Дѣйствительно, пусть порядки β и γ суть m и n, такъ что
$$\frac{\beta}{\alpha^m} = B \text{ и } \frac{\gamma}{\alpha^n} = C,$$
при чемъ числа B и C конечны и одного знака; тогда
$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^m} = \frac{\beta}{\alpha^m} + \frac{\gamma}{\alpha^m},$$

а слѣд., если $m < n$, то
$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^m} = B + \varepsilon,$$

если же $m = n$, то
$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^m} = B + C;$$

т. е. въ обоихъ случаяхъ $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^m}$ есть число конечное.

Теорема II. Порядокъ арифметической разности **неэквивалентныхъ** безк.-малыхъ равенъ меньшему изъ порядковъ ея членовъ.

Доказательство одинаково съ предъидущимъ, надо лишь при $m = n$ замѣтить дополнительно, что $B - C$ не безк.-мало, такъ какъ иначе имѣли бы, что пред. $\left(\frac{B}{C}\right) = 1$ и, слѣд., пред. $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) = 1$, а это противорѣчитъ условію.

Теорема III. Порядокъ произведенія равенъ суммѣ порядковъ множителей, ибо
$$\frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha^{m+n}} = \frac{\beta}{\alpha^m} \cdot \frac{\gamma}{\alpha^n} = \frac{\beta}{\alpha^m} \cdot \frac{\gamma}{\alpha^n} = BC,$$

т. е. числу конечному.

Теорема IV. Порядокъ частнаго равенъ разности порядковъ дѣлимаго и дѣлителя, ибо
$$\frac{\beta : \gamma}{\alpha^{m-n}} = \frac{\beta}{\alpha^m} : \frac{\gamma}{\alpha^n} = \frac{B}{C} = \text{числу конечному.}$$

Теорема V. Порядокъ степени равенъ произведенію ея показателя на порядокъ ея основанія,

ибо $$\frac{\beta^k}{\alpha^{mk}} = \left(\frac{\beta}{\alpha^m}\right) = B^k = \text{числу конечному}.$$

97. Закончимъ эту главу двумя **основными** теоремами **о замѣнѣ безк.-малыхъ эквивалентными имъ**

Теорема I. Предѣлъ отношенія двухъ безк.-малыхъ не измѣнится отъ замѣны **всего** числителя или **всего** знаменателя величинами эквивалентными.

Пусть β_1 и α_1, β_2 и α_2 эквивалентны, такъ что

$$\text{Пред.}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) = 1 \text{ и Пред.}\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) = 1;$$

тогда $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1$, $\frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2$, гдѣ ε_1 и ε_2 — безк.-малыя,

а слѣд., $$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\alpha_2(1+\varepsilon_2)}{\alpha_1(1+\varepsilon_1)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1}$$

и, значитъ, $$\text{Пред.}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = \text{Пред.}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right).$$

98. Теорема II. Предѣлъ суммы безк.-малыхъ слагаемыхъ, **число коихъ безгранично растетъ** при приближеніи **всѣхъ** ихъ къ нулю, не измѣнится отъ замѣны ихъ величинами эквивалентными, **если только сумма ихъ абсолютныхъ величинъ всегда конечна.**

Пусть $$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

причемъ n растетъ до ∞, когда всѣ α идутъ къ нулю; пусть еще β_κ эквивалентно α_κ, такъ что $\text{Пред.}\left(\frac{\beta_\kappa}{\alpha_\kappa}\right) = 1;$

тогда $\frac{\beta_\kappa}{\alpha_\kappa} = 1 + \varepsilon_\kappa$, откуда $\beta_\kappa = \alpha_\kappa + \alpha_\kappa\varepsilon_\kappa$,

гдѣ ε_κ идетъ къ нулю вмѣстѣ съ α_κ, поэтому

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_n = (\alpha_1 + \alpha_1\varepsilon_1) + (\alpha_2 + \alpha_2\varepsilon_2) + \ldots + (\alpha_n + \alpha_n\varepsilon_n) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + (\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots \alpha_n\varepsilon_n).$$

Положимъ теперь $\sigma_n = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|$ и обозначимъ

черезъ ε_0 наибольшую изъ абсолютныхъ величинъ чиселъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$; ясно, что ε_0 идетъ къ нулю, когда всѣ α идутъ къ нулю; при этомъ

$$|\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n \varepsilon_n| \leqslant |\alpha_1 \varepsilon_1| + |\alpha_2 \varepsilon_2| + \ldots + |\alpha_n \varepsilon_n| \leqslant (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|)\, \varepsilon_0 = \sigma_n \,.\, \varepsilon_0,$$

а слѣд., можемъ положить $\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n \varepsilon_n = \theta \sigma_n \varepsilon_0$, гдѣ $$-1 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Поэтому $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n + \theta \sigma_n \varepsilon_0$

и, слѣд., $\qquad$ Пред. $(\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_n) =$ Пред. $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$,

ибо Пред. $(\theta \sigma_n \varepsilon_n) = 0$, такъ какъ θ и σ_n конечны, а ε_0 безк.-мало.

Замѣчаніе. Въ этой теоремѣ существенно то, что число замѣняемыхъ слагаемыхъ безконечно; если же замѣнимъ конечное ихъ число, и при томъ даже не эквивалентными, а какими угодно безк.-малыми, либо даже **вовсе ихъ выбросимъ**, то можемъ и безъ особой теоремы быть увѣрены, что предѣлъ суммы отъ этого не измѣнится, ибо сумма конечнаго числа безк.-малыхъ имѣетъ предѣломъ нуль.

ГЛАВА V.

Непрерывность функціи.

99. Разность двухъ послѣдовательныхъ значеній перемѣннаго числа наз. его **приращеніемъ** и обозначается символомъ Δ; такъ, если, напр., одно значеніе x'а равно 2, а какое либо слѣдующее равно 2,63, то $\Delta x = 0,63$.

Опредѣленіе 1. Функція f нѣсколькихъ аргументовъ $x, y, z, \ldots$, опредѣленная около системы $x_0, y_0, z_0, \ldots$ ихъ частныхъ значеній, наз. **непрерывной** около этой системы, если приращеніе ея, вызываемое **безк.-малыми** приращеніями этихъ значеній, **само безк.-мало**, т. е.

если $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}, \mathbf{y}_0+\mathbf{k}, \mathbf{z}_0+\mathbf{l}, \ldots)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, \ldots)$
идетъ къ нулю одновременно съ h, k, l, ...

Напр., при m цѣломъ и положительномъ, имѣемъ:

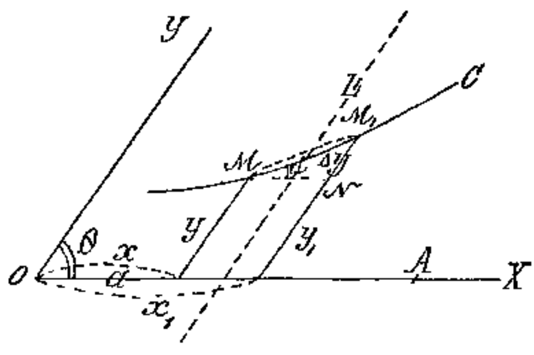
$$A(x+h)^m - Ax^m = A\left\{\frac{m}{1}x^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{1}xh^{m-1}+h^m\right\},$$

такъ что эта разность безк.-мала, когда h безк.-мало, а такъ какъ сумма конечнаго числа безк.-малыхъ сама безк.-мала, то, значитъ, всякій цѣлый многочленъ есть функція, непрерывная при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ аргумента.

Замѣчаніе. Если x_0 находится внутри того участка, на которомъ опредѣлена функція, то, конечно, Δx_0 (или h) можно брать и >0, и <0; если же x_0 есть верхняя граница этого участка, то, очевидно, h можно брать только <0; а когда x_0 есть нижняя граница названнаго участка, то h можетъ быть только <0.

Опредѣленіе 2. Если функція, опредѣленная для нѣкоторой области аргументовъ x, y, z, непрерывна **около** всякой системы значеній аргументовъ, принадлежащихъ названной области, то она называется непрерывной во **всей этой области**. Напр., всякій цѣлый многочленъ непрерывенъ на участкѣ $(-\infty, +\infty)$.

100. Геометрическое истолкованіе непрерывности функцій одного аргумента. Положимъ, что имѣемъ нѣкоторую функцію $f(x)$, опредѣленную и непрерывную на участкѣ (a, A); возьмемъ въ плоскости двѣ координатныхъ оси OX и OY (черт. 11) и построимъ всѣ точки, ординаты коихъ опредѣляются ур-ніемъ.



Черт. 11.

$$y = f(x).$$

Если мы заставимъ нѣкоторую прямую L, параллельную оси OY, перемѣщаться, не измѣняя ея направленія, то она при каждомъ своемъ положеніи встрѣтитъ хоть одну изъ помянутыхъ точекъ, ибо каждому значенію x'а на участкѣ (a,A) отвѣчаетъ хоть одно значеніе y'а; въ то же время, беря двѣ какихъ-либо изъ этихъ точекъ — напр., $M(x,y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ будемъ имѣть, что

$$M M_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2 \Delta x \Delta y . \operatorname{Cos} \theta}.$$

откуда видимъ, что можемъ уменьшить $M M_1$ какъ угодно при помощи уменьшенія Δx, ибо Δy, вслѣдствіе непрерывности $f(x)$, одновременно съ Δx идетъ къ нулю; изъ этихъ двухъ обстоятельствъ выводимъ, что построенныя нами точки образуютъ сплошную линію C.

Наоборотъ, если имѣемъ сплошную линію C, то, во-первыхъ, прямая L, при вышеуказанномъ ея перемѣщеніи, во всякомъ своемъ положеніи встрѣтитъ кривую C хоть въ одной точкѣ, а слѣд., всякому значенію x'а отвѣчаетъ нѣкоторое значеніе y'а, т. е. y есть функція x'а, опредѣленная на всемъ протяженіи нѣкотораго участка (a,A); а во-вторыхъ, беря двѣ точки — напр., $M(x,y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ на линіи C, мы изъ ΔMM_1N имѣемъ:

$$\frac{NM_1}{MN} = \frac{\operatorname{Sin} M_1MN}{\operatorname{Sin} MM_1N} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin}(\theta - \alpha)},$$

откуда
$$\Delta y = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin}(\theta - \alpha)} . \Delta x,$$

а слѣд., Δy одновременно съ Δx пойдетъ къ нулю, если только Пред. $[\operatorname{Sin}(\theta - \alpha)] \neq 0$, т. е. Пред. $(\alpha) \neq 0$. Такъ какъ предѣлъ сѣкущей MM_1 наз. касательною къ кривой C въ точкѣ M, при чемъ пред. (α) есть уголъ этой касательной съ осью OX, то изъ сказаннаго заключаемъ, что ордината **непрерывной** линіи есть **непрерывная-же**

функція абсциссы, кромѣ, **быть можетъ**, точекъ, въ коихъ касательная параллельна оси ординатъ

101. Теорема Коши. Если функція $f(x)$ непрерывна и, слѣд., опредѣлена на всемъ участкѣ (a, A), а на краяхъ его имѣетъ разные знаки, то она непремѣнно обращается въ нуль хоть при одномъ значеніи $x'a$, промежуточномъ между a и A.

Дѣйствительно, допустимъ сначала, что на участкѣ (a, A) эта функція **все время** растетъ и что, слѣд., $f(a) < 0$, $f(A) > 0$.

Тогда при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи — напр., x_0 — она превратится изъ отрицательной въ положительную, такъ что

$$f(x_0 - h) < 0 < f(x_0 + h) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

когда $h > 0$. Такъ какъ эта функція опредѣлена на всемъ участкѣ (a, A), то $f(x_0)$ есть опредѣленное, постоянное число, при чемъ по нашему предположенію еще имѣемъ:

$$f(x_0 + h) > f(x_0) > f(x_0 - h) \; . \; . \; . \; . \; \; \; . \; . \; . \; . \; (2);$$

вычитая неравенство (1) изъ (2), получимъ:

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 - h) - f(x_0 + h)$$

или $\quad \alpha > f(x_0) > -\alpha, \quad$ гдѣ $\quad \alpha = f(x_0 + h) - f(x_0 - h)$;

а отсюда, принимая во вниманіе, что $f(x)$ — непрерывна и, слѣд., α можно уменьшить, какъ угодно, тогда какъ $f(x_0)$ — постоянно, заключаемъ, что

$$f(x_0) = 0.$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ эту теорему въ случаѣ, когда $f(x)$ на участкѣ (a, A) все время убываетъ, такъ что, между прочимъ:

$$f(a) > 0, \quad f(A) < 0.$$

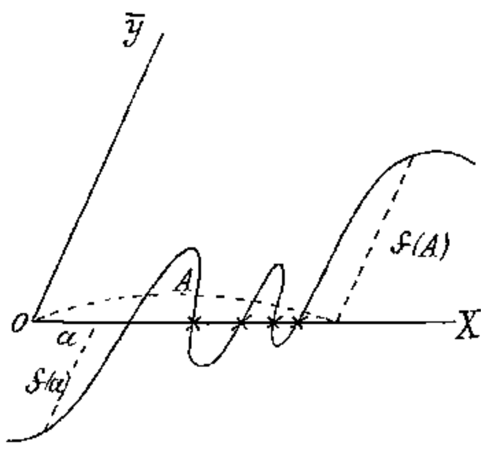
Наконецъ, если $f(x)$ на участкѣ (a, A) то растетъ, то убываетъ, то, очевидно, теорема будетъ тоже вѣрна, но только $f(x_0)$ обратится на этомъ участкѣ въ нуль столько разъ, сколько разъ она перемѣнитъ свой знакъ.

Геометрически эта теорема весьма наглядно поясняется на черт. 13.

102. Слѣдствіе. Если $f(x)$ непрерывна на всемъ участкѣ (a, A), то отъ одного **своего** значенія къ другому—напр., отъ $f(a)$ къ $f(A)$ она переходитъ, проходя черезъ **всѣ величины, промежуточныя между ними** [(т. е. между $f(a)$ и $f(A)$]. Подобное измѣненіе часто наз. **текучимъ**.

Дѣйствительно, взявъ произвольное число N между $f(a)$ и $f(A)$, разсмотримъ новую функцію $\varphi(x) = f(x) - N$; очевидно, что она тоже непрерывна на всемъ участкѣ (a, A) и что $\varphi(a)$ и $\varphi(A)$ имѣютъ разные знаки, ибо

$$\varphi(a) = f(a) - N,$$
$$\varphi(A) = f(A) - N;$$

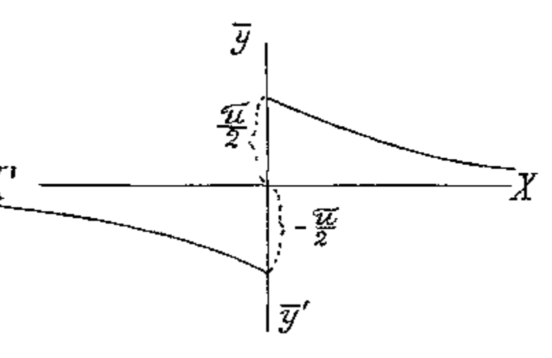


Черт. 12

поэтому хоть при одномъ, промежуточномъ между a и A, значеніи x_0 аргумента будемъ имѣть $\varphi(x_0) = 0$

или $\qquad f(x_0) - N = 0, \;$ т. е. $\; f(x) = N.$

103. Опредѣленіе 3. Если разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ не идетъ къ нулю при уменьшеніи h до нуля, то говорятъ, что $f(x)$ при $x = x_0$ **претерпѣваетъ разрывъ.** Предѣлъ $\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right]_{h=o}$ наз величиной разрыва, при чемъ послѣдній можетъ быть конечнымъ и безконечнымъ. Кромѣ того различаютъ **разрывъ вправо**—при $h > 0$ и разрывъ влѣво—при $h < 0$.



Черт. 13.

Напр., функція $f(x)$, опредѣленная условіями (черт. 11), что $f(o) = 0$ и $f(x) = \text{Arccotg}\, x$ при всѣхъ прочихъ x'ахъ, имѣетъ, очевидно, вправо отъ $x = 0$ разрывъ, равный $\frac{\pi}{2}$, а влѣво — равный $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, ибо

$$\text{Пред. } (\text{Arccotg}\, h)_{h=o} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{а Пред. } \left[\text{Arccotg}\,(-h)\right]_{h=o} = -\frac{\pi}{2},$$

Черт 14.

функція же (черт. 12) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ влѣво отъ $x = o$ — непрерывна, а вправо имѣетъ безконечный разрывъ.

104 Связь Теоріи предѣловъ съ Теоріей непрерывности.

Теорема 1. Если функція $f(x, y, z, ..)$ непрерывна (и, слѣд., опредѣлена) около значеній $x_0, y_0, z_0, ...$ аргументовъ, то

$$\text{Пред.}\Big[f(x, y, z, ...)\Big]_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} = f(x_0, y_0, z_0, ..)$$

(короче — предѣлъ функціи равенъ той же функціи предѣловъ).

Дѣйствительно, изъ понятія о непрерывности слѣдуетъ, что $f(x, y, z, ...) - f(x_0, y_0, z_0, ..)$ идетъ къ нулю одновременно съ $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0, ...$; а такъ какъ $f(x_0, y_0, z_0, ..)$ есть число постоянное, то это и значитъ, что

$$\text{Пред.}\Big[f(x, y, z, ..)\Big]_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ \cdots}} = f(x_0, y_0, z_0, ..).$$

Теорема 2 (обратная). Если $f(x, y, z, ...)$ опредѣлена около значеній $x_0, y_0, z_0, ...$ аргументовъ и если

$$\text{Пред.}\Big[f(x, y, z, ..)\Big]_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} = f(x_0, y_0, z_0, ...),$$

то эта функція непрерывна около этихъ значеній аргументовъ. Чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ лишь переписать данное равенство такъ:

$$\text{Пред.}\Big[f(x, y, z, ...) - f(x_0, y_0, z_0, ...)\Big]_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} = 0$$

Эти двѣ теоремы, не смотря на всю ихъ простоту, чрезвычайно важны, такъ какъ показываютъ что Теорія предѣловъ и Теорія непрерывности по существу тожественны между собой; иначе говоря, всякая теорема о предѣлахъ даетъ соотвѣтствующую теорему о непрерывности.

105. На этомъ основаніи можемъ безъ особыхъ доказательствъ высказать слѣдующія предложенія.

I. Всякая алгебрическая сумма конечнаго числа непрерывныхъ функцій сама есть функція непрерывная.

II. Произведеніе конечнаго числа непрерывныхъ функцій само есть функція непрерывная.

III. Отношеніе двухъ непрерывныхъ функцій представляетъ функцію непрерывную, **за исключеніемъ тѣхъ значеній аргументовъ, при коихъ знаменатель обращается въ нуль.**

IV. Любая степень, въ коей основаніе и показатель суть функціи непрерывныя, сама есть функція непрерывная, **пока ея основаніе получаетъ лишь положительныя и отличныя отъ нуля значенія.**

V. Логарифмъ непрерывной функціи, получающей лишь положительныя и отличныя отъ нуля значенія, самъ представляетъ функцію непрерывную.

VI. Всѣ тригонометрическія величины непрерывной функціи сами непрерывны, если только не обращаются въ ∞.

и VII. Всѣ круговыя функціи отъ непрерывной функціи сами непрерывны, **за исключеніемъ Arccotgu, который при прохожденіи u черезъ нуль перескакиваетъ съ $-\frac{\pi}{2}$ на $\frac{\pi}{2}$ или обратно.**

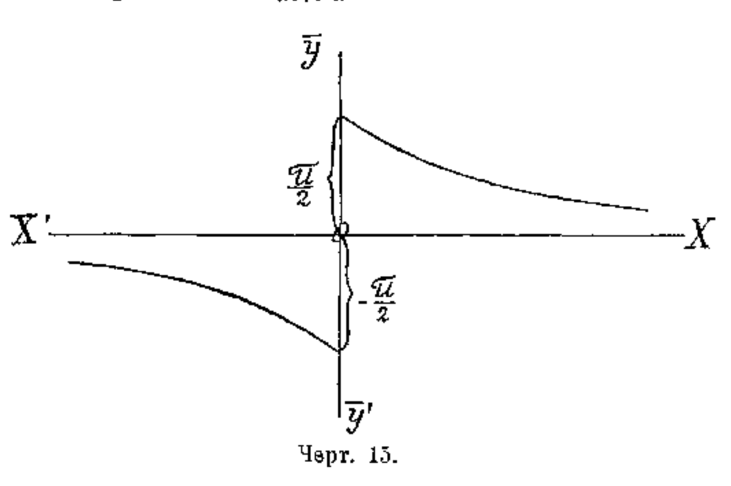
106. Изъ теоремъ № 104-го еще вытекаетъ, что если $f(x)$, напр., при $x=x_0$ не опредѣлена, то, желая сохранить непрерывность этой функціи и около $x=x_0$, надо опредѣлить величину $f(x_0)$ равенствомъ

$$f(x_0)=\text{Пред.}\left[f(x)\right]_{x\ldots x_0}.$$

Напр., функція $f(x)=\frac{a^2-x^2}{a-x}$ при всякомъ $x\mp a$ вполнѣ опредѣленна и равна $a+x$; при x же, равномъ a, обращается въ $\frac{0}{0}$; поэтому для сохраненія непрерывности надо взять

$$f(a)=\text{Пред.}\,(a+x)_{x\ldots a}=2a.$$

Точно также, чтобы возстановить по возможности непрерывность функціи Arccotg x около $x=0$, надо приписать ей два значенія: $-\frac{\pi}{2}$, когда x подходитъ къ нулю, возрастая; и $+\frac{\pi}{2}$, когда x идетъ къ нулю, убывая. Тогда (черт. 15) эта



Черт. 15.

функція станетъ непрерывной влѣво и вправо отъ $x=0$, разрываясь лишь при $x=0$.

107. Непрерывность обратной функціи. Теорема: если y есть однозначная, возрастающая (убывающая) и непрерывная функція x, то x по отношенію къ y тоже будетъ функціей однозначной, возрастающей (убывающей) и непрерывной.

Дѣйствительно, во-первыхъ, мы уже знаемъ (№ 37,) что прямая и обратная функція должны быть одновременно возрастающими или одновременно убывающими: во-вторыхъ, обратная функція будетъ однозначной, ибо, если бы напр., x при $y=y_0$ имѣлъ два значенія x'_0 и x''_0, то y при измѣненіи x отъ x'_0 къ x''_0 долженъ былъ бы вернуться къ исходному значенію y_0 и, слѣд., не могъ бы все время при этомъ расти ибо все время убывать; наконецъ, если $y=f(x)$, при чемъ $f(x)$ непрерывна, то (№ 100) кривая, выражаемая ур-іемъ.

$$y=f(x)$$

тоже непрерывна, а слѣд., (№ 100), и x непрерывенъ относительно y.

109. Непрерывность функціи сложныхъ чиселъ. Если w есть функція перемѣнныхъ $u, v, \ldots$, которыя въ свою очередь суть функціи аргументовъ $x, y, z, \ldots$, то $u, v, \ldots$ наз. **сложными числами** (сложными аргументами), а w **функціей сложныхъ чиселъ** (fonction composée). При этомъ очевидно, что для полученія выраженія w непосредственно въ аргументахъ, надо лишь сдѣлать подстановку -- именно, если $w=F(u, v, \ldots)$, а $u=f(x, y, z, \ldots)$, $v=\varphi(x, y, z, \ldots)$ и т. д., то $w=F[f(x, y, z, \ldots), \varphi(x, y, z, \ldots), \ldots]$.

Теорема (Коши). Функція **непрерывныхъ** сложныхъ чиселъ, **непрерывная** относительно ихъ, будетъ непрерывна и относительно самихъ независимыхъ.

Дѣйствительно, положимъ, что $u, v, \ldots$ непрерывны около x_0, y_0, z_0, и $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)=u_0$, $\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)=v_0$, и т. д., а w непрерывна около $u_0, v_0, \ldots$, при чемъ $F(u_0, v_0, \ldots)=w_0$. Тогда $w-w_0$ идетъ къ нулю одновременно съ $u-u_0$, $v-v_0$, а послѣднія идутъ къ нулю одновременно съ $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0 \ldots$; слѣд., если $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, ... пойдутъ къ нулю, то и $w-w_0$ пойдетъ къ нулю, а это и значитъ, что w непрерывна относительно $x, y, z, \ldots$ около ихъ значеній $x_0, y_0, z_0, \ldots$.

Теорема эта даетъ возможность рѣшать вопросъ о непрерывности любой явной функціи, опредѣленной конечною совокупностью

аналитическихъ дѣйствій, а также часто и тогда, когда явное аналитическое выраженіе функціи мы получить не можемъ.

109. Теорема. Если функція $f(x)$ непрерывна на всемъ участкѣ (a, b), то она **достигаетъ** на немъ своей высшей (M) а низшей (m) границы, т. е. на этомъ участкѣ существуютъ два такихъ значенія α и β аргумента, что $f(\alpha) = m$, а $f(\beta) = M$.

Докажемъ, напр., существованіе β... По свойству высшей границы имѣемъ, что на участкѣ (a, b) у функціи $f(x)$ существуютъ значенія, сколь угодно близкія къ M. Поэтому, если раздѣлимъ участокъ (a, b), напр., на двѣ равныхъ части, то хоть на одной изъ нихъ у $f(x)$ существуютъ значенія, произвольно близкія къ M, но, конечно, не превышающія M; иначе говоря, хоть на одной изъ этихъ частей высшая граница значеній $f(x)$ есть M. Обозначивъ крайнія величины аргумента на этой части черезъ a_1 и b_1, можемъ то же разсужденіе примѣнить къ участку (a_1, b_1), и т. д., такъ что въ результатѣ получимъ безконечную серію участковъ (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... (a_n, b_n), при чемъ на каждомъ изъ нихъ высшая граница значеній $f(x)$ есть M и каждый участокъ лежитъ весь внутри всякаго изъ предшествующихъ ему, такъ что любое изъ чиселъ $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ меньше каждаго изъ чиселъ $b, b_1, b_2, b_3, \ldots$; въ то же время имѣемъ

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}, \ \ldots \ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

и, слѣд.,

$$\text{Пред.} \left(b_n - a_n\right)_{n = \infty} = 0,$$

т. е. разность **соотвѣтственныхъ** чиселъ a_n и b_n идетъ къ нулю. Отсюда, на основаніи № 54-го, заключаемъ, что числа a_n и числа b_n имѣютъ общій предѣлъ β, заключающійся между ними. Полагая теперь $b_n - a_n = \varepsilon_n$ можемъ значенія аргумента на участкѣ (a_n, b_n) выразить такъ: $x = \beta + \theta\varepsilon_n$, гдѣ θ — правильная дробь, вслѣдствіе чего $f(x) = f(\beta + \theta\varepsilon_n) = f(\beta) + \omega_n$, при чемъ ω_n идетъ къ нулю вмѣстѣ съ ε_n, т. е. всѣ значенія $f(x)$ на участкѣ (a_n, b_n) становятся безконечно-близкими къ $f(\beta)$ при увеличеніи n до ∞; но среди этихъ значеній есть также произвольно близкія къ M, значитъ, и разность между M и $f(\beta)$ должна быть меньше произвольно малой величины; а такъ какъ оба эти числа, а слѣд., и ихъ разность, постоянны, то она равна нулю,

т. е.
$$f(\beta) = M.$$

ГЛАВА VI.

Производныя и дифференціалы.

§ 1. Понятіе о производной и о дифференціалѣ.

110. Разсматривая такъ наз. линейную функцію, т. е. опредѣляемую ур-ніемъ

$$y = ax + b,$$

мы, давъ x'у новое значеніе x_1, имѣемъ

$$y_1 = ax_1 + b,$$

откуда $y_1 - y = a(x_1 - x)$ или $\Delta y = a \Delta x$; такимъ образомъ приращеніе такой функціи пропорціонально приращенію аргумента; иначе говоря, отношеніе этихъ двухъ приращеній постоянно и при томъ какъ разъ равно тому числу a, которое вполнѣ опредѣляетъ быстроту измѣненія функціи.

Если возьмемъ какую нибудь функцію $f(x)$, то подобное обстоятельство уже не будетъ имѣть мѣста — отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ мѣняться съ измѣненіемъ, какъ x'а, такъ и Δx; оно наз. **среднимъ приращеніемъ** функціи на участкѣ Δx аргумента и показываетъ быстроту измѣненія на этомъ участкѣ нѣкоторой воображаемой линейной функціи, начальное и конечное значенія коей равняются соотвѣтствующимъ значеніямъ разсматриваемой функціи $f(x)$.

Опредѣленіе 1. Предѣлъ средняго приращенія функціи, т. е. предѣлъ отношенія приращенія функціи къ соотвѣтствующему безк.-малому приращенію аргумента, когда оно идетъ къ нулю, наз. **производною** отъ этой функціи. Значитъ, производная $y'a$ равна

$$\text{Пред.} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x \dots o} = \text{Пред.} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]_{h \dots o}.$$

Замѣчаніе 1. Такъ какъ дробь растетъ безгранично, если ея знаменатель идетъ къ нулю, а числитель при этомъ остается конечнымъ, то, значитъ, для того, что бы производная не была $=\infty$, необходимо стремленіе Δy къ нулю одновременно съ Δx. На этомъ основаніи, говоря о производной отъ функціи, мы будемъ всегда считать, что послѣдняя **непрерывна**.

Замѣчаніе 2. Можетъ случиться, что и при этомъ условіи отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ растетъ безгранично при подведеніи Δx къ нулю; тогда мы будемъ говорить, что функція все таки имѣетъ производную, но только она равна ∞. Однако этотъ случай представитъ исключеніе: вообще же во всѣхъ дальнѣйшихъ теоремахъ мы будемъ считать, что производная **конечна и вполнѣ опредѣленна**.

Кромѣ того, можетъ оказаться, что

$$\text{Пред.} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]_{h=o} \neq \text{Пред.} \left[\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right]_{h=o},$$

при чемъ тогда приходится различать производную вправо и производную влѣво. Мы будемъ считать, что 1) x принадлежитъ серединѣ участка, на которомъ опредѣлена данная функція, такъ что h можно брать и >0 и <0; и 2) что производныя „вправо" и „влѣво" одинаковы.

Понятіе о производной введено въ науку впервые Исаакомъ Ньютономъ (род. 1642 г., † 1727 г.) въ его Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, изданныхъ въ 1687-мъ г.; Ньютонъ называлъ производную **флюксіей** и былъ приведенъ къ этому понятію изученіемъ вопросовъ механики, именно: если y — путь, проходимый точкой, а x — время, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость за время Δx, а пред. $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ есть такъ наз. скорость въ моментъ a.

111. Величина производной отъ какой либо функціи $f(x)$, вообще говоря, сама зависитъ отъ величины x, т. е. представляетъ его функцію; эта новая функція наз. также производной и обозначается такъ: y'_x, либо такъ: $f'(x)$.

Изложеніе способовъ **„дифференцированія"** функціи (т. е. нахожденія аналитическаго выраженія производной отъ функцій, заданныхъ аналитически-же), установленіе зависимостей между свойствами функціи и свойствами ея производной, и примѣненіе этихъ зависимостей къ рѣшенію различныхъ алгебрическихъ и геометрическихъ вопросовъ составляютъ содержаніе **Дифференціальнаго Исчисленія**; опре-

дѣленіе свойствъ и вычисленіе величины функціи по такъ или иначе заданной ея производной образуютъ предметъ **Интегральнаго Исчисленія**: а оба эти Исчисленія вмѣстѣ составляютъ такъ наз. **Анализъ безк.-малыхъ** или **Трансцендентный Анализъ**

112. Теорема I. Если функція на нѣкоторомъ участкѣ сохраняетъ постоянное значеніе, то ея производная равна нулю, ибо если $y = a$, то и $y_1 = a$,

откуда $$y_1 - y = 0 \quad \text{или} \quad \Delta y = 0,$$

а слѣд., $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \text{ почему и пред. } \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 0.$$

Теорема II. Производная самого аргумента равна единицѣ, такъ какъ если $y = x$, то и $y_1 = x_1$,

откуда $$y_1 - y = x_1 - x \quad \text{или} \quad \Delta y = \Delta x$$

и, слѣд., $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \text{ а потому и Пред. } \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 1.$$

113. Опредѣленіе 2. Произведеніе производной функціи на приращеніе аргумента наз. ея **дифференціаломъ** и обозначается такъ: dy или $d\,f(x)$.

Дифференціалъ аргумента равенъ его приращенію, ибо, по опредѣленію, $dx = x'_x \,.\, \Delta x = 1 \,.\, \Delta x = \Delta x$; отсюда слѣдуетъ, что можемъ еще сказать, что дифференціалъ функціи есть произведеніе ея производной на дифференціалъ аргумента, т. е

$$dy = y'_x \,.\, dx, \quad \text{или еще} \quad d\,f(x) = f'(x)\,dx.$$

Обратно, отсюда $y'_x = \frac{dy}{dx}$, т. е. производная функціи равна отношенію дифференціала этой функціи къ дифференціалу аргумента.

Теорема. Дифференціалъ функціи есть главное значеніе ея приращенія, если только ея производная не равна нулю.

Это, на основаніи понятія о главномъ значеніи безк.—малой, слѣдуетъ изъ равенства $$y'_x = \text{Пред. } \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

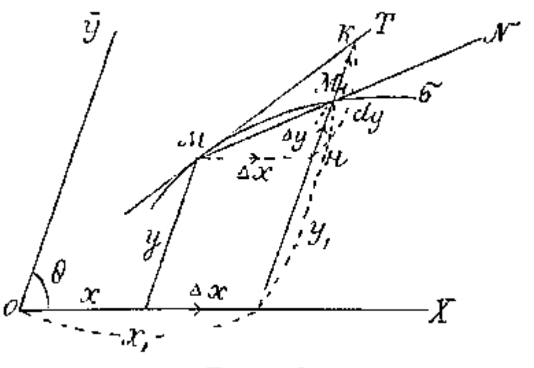
Замѣчаніе. Дифференціалъ функціи, какъ видно изъ сказаннаго, зависитъ вообще отъ величины $x'a$; дифференціалъ же аргумента принято считать, хотя и произвольнымъ безк.-малымъ, но однимъ и тѣмъ же во все время изслѣдованія вопроса, т. е. не зависящимъ отъ величины аргумента, вслѣдствіе чего $(dx)'_x = 0$;

это сокращенно выражаютъ въ словахъ: „дифференціалъ аргумента есть число постоянное".

114. Если мы научимся находить производныя функцій либо ихъ дифференціалы, то, на основаніи послѣдней теоремы, получимъ возможность примѣнять въ наиболѣе выгодной формѣ теоремы № 97 и № 98 о допустимости замѣны безк.-малыхъ эквивалентными имъ при изученіи отношенія двухъ безк.-малыхъ либо суммы безк.-большаго числа безк.-малыхъ; это, между прочимъ, объясняетъ, почему Трансцендентный Анализъ оказывается такимъ могущественнымъ орудіемъ при рѣшеніи различныхъ математическихъ вопросовъ: не будучи въ состояніи установить зависимость между конечными величинами функціи и аргумента, никакой частью коихъ нельзя пренебречь, мы можемъ оказаться въ силахъ найти связь между главными значеніями ихъ безк.-малыхъ приращеній, или ихъ дифференціалами, т. е. найти производную изучаемой функціи; а если потерпимъ и здѣсь неудачу, то можемъ тотъ же методъ примѣнить къ самой производной, и т. д.

115. Геометрическое значеніе производной и дифференціала.

Опредѣленіе. Касательной къ кривой въ точкѣ M наз. предѣлъ сѣкущей при совмѣщеніи двухъ ея точекъ пересѣченія съ кривой—въ одну.



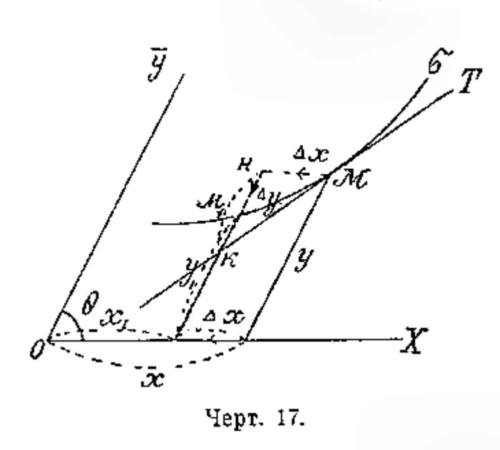
Черт. 16.

Теорема. Производная ординаты кривой по абсциссѣ есть угловой коэфиціентъ касательной въ соотвѣтствующей точкѣ кривой.

Дѣйствительно, пусть MT есть касательная къ кривой σ въ точкѣ M (x,y), а MN сѣкущая, при чемъ смежная съ M точка пересѣченія ея

съ кривою есть M_1 (x_1, y_1); ур—ніе прямой MN, какъ извѣстно напишется такъ:
$$\frac{X-x}{x_1-x}=\frac{Y-y}{y_1-y},$$
гдѣ X, Y координаты любой точки сѣкущей;

отсюда
$$Y-y=\frac{y_1-y}{x_1-x}\cdot(X-x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x),$$



Черт. 17.

а переходъ къ предѣлу при $\Delta x=0$, т. е. при совмѣщеніи точки M_1 съ M, даетъ ур—ніе касательной MT, именно:
$$Y-y=y'_x\ (X-x),$$
откуда и вытекаетъ доказываемая теорема. При этомъ, если оси координатъ образуютъ уголъ θ, то, какъ извѣстно изъ Аналитической Геометріи,
$$Y'_x=\frac{\sin\alpha}{\sin\ (\theta-\alpha)},$$
гдѣ α — уголъ касательной съ осью абсциссъ; если же оси координатъ прямоугольны, то просто $\qquad Y'_x=\operatorname{tg}\alpha.$

Для точки K (X_1, Y_1) на касательной, для которой $X_1=x+\Delta x$, мы изъ ур—нія касательной получаемъ, что
$$Y_1-y=y'_x\cdot\Delta x=dy, \text{ т. е. } HK=dy;$$
такимъ образомъ дифференціалъ функціи есть приращеніе ординаты **касательной** при переходѣ къ точкѣ ея, абсцисса коей на Δx отличается отъ абсциссы точки касанія (тогда какъ Δy есть соотвѣтствующее приращеніе ординаты точекъ самой кривой; для лучшаго уясненія даннаго истолкованія, на черт. 17-мъ изображенъ еще одинъ изъ возможныхъ случаевъ расположенія кривой).

116 Опредѣленіе 3. Частной производной по x функціи u нѣсколькихъ аргументовъ x, y, z,...., **наз.** предѣлъ отно-

шенія приращенія этой функціи, **вызваннаго безк.-малымъ приращеніемъ лишь х'а**, къ этому его приращенію, когда оно идетъ къ нулю; обозначается она такъ:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ или } \frac{\partial f(x, y, z, ..)}{\partial x},$$

такъ что $$\frac{\partial f}{\partial x} = \textbf{Пред.} \left\{\frac{f(x+h, y, z, ..) - f(x, y, z, ..)}{h}\right\}_{h=0},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \textbf{Пред.} \left\{\frac{f(x, y+k, z, ..) - f(x, y, z, ..)}{k}\right\}_{k=0}, \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что отысканіе частныхъ производныхъ должно совершаться по тѣмъ же правиламъ, какъ и отысканіе просто производныхъ, при чемъ прочіе аргументы являются въ роли постоянныхъ коэфиціентовъ.

Замѣчаніе. Въ знакѣ $\frac{\partial w}{\partial x}$ нѣтъ ни дѣйствія дѣленія, ни дифференціаловъ отъ w и отъ x — это одинъ нерасчленяемый символъ, который нельзя читать иначе, чѣмъ **„частная производная отъ w по x"**.

Опредѣленіе 4. Полнымъ дифференціаломъ функціи наз. сумма произведеній ея частныхъ производныхъ на дифференціалы соотвѣтствующихъ аргументовъ; онъ обозначается черезъ df или dw, такъ что

$$d\,f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

117. Выраженіе приращенія функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Положимъ что имѣемъ нѣкоторую функцію перемѣнныхъ x, y, z — напр., $w = f(x, y, z)$, которая непрерывна и имѣетъ конечныя частныя производныя,

и пусть $$\Delta w = f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z);$$

это можно переписать такъ:

$$\left.\begin{aligned}\Delta w = f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y+k, z+l) + \\ + f(x, y+k, z+l) - f(x, y, z+l) + \\ + f(x, y, z+l) - f(x, y, z)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Но по опредѣленію

$$\text{Пред.} \left[\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}\right]_{h=0} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x},$$

откуда $$\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon_1,$$

гдѣ $$\text{Пред.}\ (\varepsilon_1)_{h=0} = 0,$$

и, значитъ, $f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y+k, z+l) =$
$$= \left[\frac{\partial f(x, y+k, z+l)}{\partial x} + \varepsilon_1\right] h;$$

обозначимъ теперь черезъ ω_1 приращеніе функціи $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$ при измѣненіи y и z въ $y+k$ и $z+l$, т. е. положимъ
$$\frac{\partial f(x, y+k, z+l)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \omega_1,$$

при чемъ еще предположимъ, что $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$ непрерывна относительно y и z, тогда можемъ написать, что
$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y+k, z+l) = \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \omega_1 + \varepsilon_1\right] h \ldots (2),$$

гдѣ $$\text{Пред.}\ (\omega_1)_{\substack{k=0\\ l=0}} = 0.$$

Подобнымъ же образомъ, предполагая, что $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$ непрерывна относительно z, найдемъ, что
$$f(x, y+k, z+l) - f(x, y, z+l) = \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} + \omega_2 + \varepsilon_2\right] k \ldots (3),$$

гдѣ $$\text{Пред.}\ (\varepsilon_2)_{k=0} = 0 \quad \text{и} \quad \text{Пред.}\ (\omega_2)_{l=0} = 0;$$

наконецъ, $$f(x, y, z+l) - f(x, y, z) = \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} + \varepsilon_3\right] l \ldots (4),$$

гдѣ $$\text{Пред.}\ (\varepsilon_3)_{l=0} = 0.$$

Подставляя выраженія (2), (3) и (4) въ равенство (1), получимъ искомое выраженіе для Δw — именно:
$$\Delta w = \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \omega_1 + \varepsilon_1\right] h + \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} + \omega_2 + \varepsilon_2\right] k +$$
$$+ \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} + \varepsilon_3\right] l \ldots (\text{I}),$$

при условіи, конечно, что выполнены вышеуказанныя требованія относительно непрерывности частныхъ производныхъ (обобщеніе полученнаго выраженія на случай большаго числа перемѣнныхъ ясно само собою).

Слѣдствіе. Если x, y, z... суть перемѣнныя **независимыя**, при чемъ ихъ приращенія сравнимы другъ съ другомъ по степени ихъ малости, то разность между приращеніемъ функціи, имѣющей непрерывныя частныя производныя, и ея полнымъ дифференціаломъ есть безк.-малая высшаго порядка.

Дѣйствительно, переписавъ ур-ніе (I) такъ:

$$\Delta w = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \frac{\partial f}{\partial z} l + (\omega_1 + \varepsilon_1) h + (\omega_2 + \varepsilon_2) k + \varepsilon_3 l$$

или еще такъ: $$\Delta w = dw + \omega,$$

видимъ, что ω будетъ высшаго порядка, чѣмъ dw.

Такимъ образомъ полный дифференціалъ функціи нѣсколькихъ аргументовъ играетъ для нея ту же роль, какъ просто дифференціалъ для функціи одного аргумента.

§ 2. Дифференцированіе функцій.

118 Теорема I Производная (дифференціалъ) функціи сложныхъ чиселъ по аргументу равна суммѣ произведеній ея частныхъ производныхъ по каждому сложному числу на его производную по аргументу (на его дифференціалъ), т. е. если $w = f(u, v, ...)$, при чемъ $u, v, ...$ суть функціи x'а, то

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \dots ;$$

(при этомъ, разумѣется, предполагаемъ, что всѣ помянутыя производныя конечны, опредѣленны и непрерывны).

Дѣйствительно, дадимъ x'у приращеніе Δx и пусть $u, v, ...$ получатъ вслѣдствіе этого приращенія $\Delta u, \Delta v, ...$, которыя въ свою очередь вызовутъ у w приращеніе Δw; тогда на основаніи формулы I, выражающей приращеніе функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ (№ 117), будемъ имѣть, что

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \varepsilon_1 + w_1\right) \Delta u + \left(\frac{\partial w}{\partial v} + \varepsilon_2 + w_2\right) \Delta v + ..$$

и, слѣд. $\frac{\Delta w}{\Delta x} = \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \varepsilon_1 + v_1\right)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\frac{\partial w}{\partial v} + \varepsilon_2 + w_2\right)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \ldots;$

подводя же Δx, а слѣд., и Δu, Δv, ... къ нулю, получимъ

$$\text{Пред.}\left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right) = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\text{Пред.}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\text{Пред.}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \ldots,$$

т. е. $$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x + \ldots$$

а умноженіе этого равенства на dx дастъ еще.

$$w'_x \cdot dx = w'_u \cdot u'_x\, dx + w'_v \cdot v'_x\, dx + \ldots.$$

или $$dw = w'_u \cdot du + w'_v \cdot dv + \ldots\ldots.$$

Это послѣднее равенство показываетъ между прочимъ, что дифференціалъ функціи сложныхъ чиселъ выражается въ ихъ дифференціалахъ такъ же, какъ въ случаѣ, если бы они были аргументами.

Предъидущая теорема показываетъ, что мы съумѣемъ продифференцировать любую явную функцію, если будемъ знать выраженія производныхъ простѣйшихъ аналитическихъ функцій; къ отысканію послѣднихъ и перейдемъ, но предварительно еще замѣтимъ, что въ частномъ случаѣ, когда функція зависитъ лишь отъ одного сложнаго числа u, получаемъ просто:

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x \quad \text{и} \quad dw = w'_u \cdot du$$

т. е. производная (дифференціалъ) функціи сложнаго числа по аргументу равна произведенію производной отъ этой функціи по сложному числу, на его производную по аргументу (на его дифференціалъ),

119. Теорема II. Тождественное (и **только** тождественное) равенство можно дифференцировать, ибо если

$$f(x) = \varphi(x),$$

то и $f(x+h) = \varphi(x+h)$, откуда $f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$

и, слѣд., $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h};$$

подводя же h къ нулю, въ предѣлѣ получимъ.

$$f'(x) = \varphi'(x),$$

послѣ чего умноженіе на dx еще даетъ:

$$d f(x) = d\varphi(x).$$

120. Теорема III. Постоянный множитель можно выносить изъ подъ знака производной (дифференціала), ибо

если $$w = au,$$

гдѣ a — постоянно, то $$w_1 = au_1$$

и, слѣд., $$w_1 - w = a(u_1 - u);$$

поэтому $$\frac{w_1 - w}{\Delta x} = a\frac{u_1 - u}{\Delta x}$$

и, значитъ, $$\text{Пред.}\,\frac{w_1 - w}{\Delta x} = a\,\text{Пред.}\,\frac{u_1 - u}{\Delta x},$$

т. е. $$w'_x = a \cdot u'_x,$$

послѣ чего умноженіе на dx еще даетъ:

$$\underline{dw = a\,du.}$$

121. Теорема IV. Производная (дифференціалъ) алгебрической суммы конечнаго числа функцій равняется такой же алгебрической суммѣ производныхъ (дифференціаловъ) этихъ функцій.

Дѣйствительно, пусть $w = z - u + v$; если при увеличеніи x'а на h, числа z, u, v и w получатъ соотвѣтственно значенія z_1, u_1, v_1, w_1,

то $$w_1 = z_1 - u_1 + v_1$$

и, слѣд., $w_1 - w = z_1 - u_1 + v_1 - (z - u + v) = z_1 - z - (u_1 - u) + v_1 - v$,

а потому $$\frac{w_1 - w}{\Delta x} = \frac{z_1 - z}{\Delta x} - \frac{u_1 - u}{\Delta x} + \frac{v_1 - v}{\Delta x};$$

переходъ же къ предѣлу—при $\Delta x = 0$, дастъ

$$w'_x = z'_x - u'_x + v'_x,$$

послѣ чего еще, отъ умноженія на dx, получаемъ:

$$dw = dz - du + dv.$$

122. Теорема V. Производная (дифференціалъ) логарифма числа равняется произведенію абсолютнаго мо-

дуля этой системы логарифмовъ на отношеніе производной (дифференціала) помянутаго числа къ самому числу, т. е

$$\log'_x u = M \cdot \frac{u'_x}{u}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $w = \log u$,

то
$$w_1 = \log u_1 = \log (u + \Delta u)$$

и, слѣд., $\Delta w = w_1 - w = \log (u + \Delta u) - \log u = \log \frac{u + \Delta u}{u} =$

$$= \log \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right);$$

поэтому $w'_x =$ Пред. $\left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_{\Delta x = o} =$ Пред. $\left\{\frac{\log \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x}\right\}_{\Delta x = o} =$

$$= M \text{ Пред. } \left\{\frac{L \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x}\right\}_{\Delta x = o};$$

а такъ какъ $L\,(1 + \alpha)$ и α эквивалентны другъ другу, то просто

$$w'_x = M. \text{ Пред. } \left\{\frac{\left(\frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x}\right\}_{\Delta x = o} = M. \text{ Пред. } \left\{\frac{\Delta u}{u \Delta x}\right\}_{\Delta x = o} = \frac{M}{u} \cdot \text{ Пред. } \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{\Delta x = o},$$

ибо u не зависитъ отъ Δx; значитъ,

$$\log'_x u = M \cdot \frac{u'_x}{u},$$

а умножая это равенство на dx, получаемъ еще.

$$d\log u = M \frac{du}{u}.$$

Частный случай. Производная (дифференціалъ) **Неперова** логарифма числа равняется отношенію производной (дифференціала) этого числа къ самому числу:

$$L'_x u = \frac{u'_x}{u} \quad \text{и} \quad dLu = \frac{du}{u},$$

ибо въ этомъ случаѣ модуль $M = 1$.

Въ еще болѣе частномъ случаѣ имѣемъ:

$$L'x = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad dLx = \frac{dx}{x}.$$

Примѣръ $dllx = \frac{dlx}{lx} = \frac{dlx}{llx \cdot lx} = \frac{dx}{llx \cdot lx \cdot lx} = \frac{dx}{vlxllx}$

123. Теорема VI. Производная (дифференціалъ) произведенія конечнаго числа функцій равняется суммѣ произведеній производной (дифференціала) каждаго множителя на всѣ остальные.

Въ самомъ дѣлѣ, если $w = yzu \ldots vt$,

то $$lw = ly + lz + lu + \ldots lv + lt;$$

дифференцированіе этого равенства, даетъ:

$$\frac{w'}{w} = \frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} + \frac{u'}{u} + \ldots + \frac{v'}{v} + \frac{t'}{t},$$

откуда $$w' = w\frac{y'}{y} + w\frac{z'}{z} + w\frac{u'}{u} + \ldots + w\frac{v'}{v} + w\frac{t'}{t}$$

или $$(yzu \cdots vt)' = zu \cdots vt \cdot y' + yu \cdots vt \cdot z' + \cdots + yz \cdots v \cdot t',$$

а слѣд., еще $$d(yzu \cdots vt) = zu \cdots vt \cdot dy + yu \cdots vt \cdot dz + \cdots + yz \cdots v \cdot dt.$$

Слѣдствіе. Полагая $y = z = u = \cdots = v = t$ и обозначая черезъ n число всѣхъ множителей, такъ что n—цѣлое, положительное, получаемъ:

$$\left(y^n\right)'_x = \underbrace{y^{n-1} y'_x + y^{n-1} y'_x + \cdots + y^{n-1} y'_x}_{n \text{ разъ}},$$

т. е. $$\left(y^n\right)'_x = ny^{n-1} y'_x$$

и затѣмъ $$d\left(y^n\right) = ny^{n-1} dy.$$

Примѣръ 1. $\left(x^3 \lg x + 2x^4\right)'_x = \left(x^3 \lg x\right)'_x + 2\left(x^4\right)'_x = \lg x \cdot \left(x^3\right)'_x + x^3 \cdot \left(\lg x\right)'_x +$

$$+ 2 \cdot 4x^3 = \lg x \cdot 3x^2 + x^3 \cdot \frac{M}{x} + 8x^3 = x^2\left[3 \lg x + M + 8x\right].$$

Примѣръ 2. $\left\{\left[\lg(4x^2 + 5x - 3)\right]^3\right\}'_x = 3\left[\lg(4x^2 + 5x - 3)\right]^2 \cdot \left[\lg(4x^2 + 5x - 3)\right]'_x =$

$$= 3\left[\lg(4x^2 + 5x - 3)\right]^2 \cdot \frac{M\,(4x^2 + 5x - 3)'}{4x^2 + 5x - 3} = \frac{3M\,[\lg(4x^2 + 5x - 3)]^2\,(8x + 5)}{4x^2 + 5x - 3}.$$

124. Теорема VII. Производная (дифференціалъ) дроби равняется дроби-же, имѣющей въ знаменателѣ квадратъ даннаго знаменателя, а въ числителѣ—разность произведеній знаменателя на производную (дифференціалъ) числителя и числителя на производную (дифференціалъ) знаменателя,

т. е. $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad \text{и} \quad d\,\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Дѣйствительно, полагая $w = \frac{u}{v}$, имѣемъ

$$lw = lu - lv,$$

откуда дифференцированіемъ получаемъ:

$$\frac{w'}{w} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

и, слѣд., $$w' = w \cdot \frac{u'}{u} - w\,\frac{v'}{v} = \frac{u}{v}\cdot\frac{u'}{u} - \frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

а умноженіе на dx даетъ:

$$dw = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Частный случай. Непосредственно на основаніи №№ 123 и 124 еще получаемъ:

$$\left(\frac{u}{v^n}\right)' = \frac{v^n u' - u\,(v^n)'}{(v^n)^2} = \frac{v^n u' - u\,.\,nv^{n-1}v'}{v^{2n}},$$

т. е. $$\left(\frac{u}{v^n}\right)' = \frac{vu' - nuv'}{v^{n+1}} \quad \text{и, слѣд.,} \quad d\left(\frac{u}{v^n}\right) = \frac{vdu - nudv}{v^{n+1}}.$$

Прим. 1. $$\left(\frac{3x^2 - 5\,lx}{2x+1}\right)'_x = \frac{\left(2x+1\right)\left(3x^2 - 5\,lx\right)'_x - \left(3x^2 - 5\,lx\right)\left(2x+1\right)'_x}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{\left(2x+1\right)\left(6x - \frac{5}{x}\right) - \left(3x^2 - 5\,lx\right)2}{(2x+1)^2} = \frac{6x^3 + 6x^2 - 10\,x - 5 + 10\,x\,lx}{x\,(2x+1)^2}.$$

Прим. 2. $$d\,\frac{8x^3 - 2x + 1}{(x^2-3)^3} = \frac{(x^2-3)\;d\;(8x^3 - 2x + 1) - 3\;(8x^3 - 2x + 1)\;d\;(x^2 - 3)}{(x^2-3)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-3)\;(24x^2dx - 2dx) - 3\,(8x^3 - 2x + 1)\;.\;2x\,dx}{(x^2-3)^4} = \frac{-24x^4 - 62x^2 - 6x + 6}{(x^2-3)^4}\;dx.$$

125. Теорема VIII. Производная (дифференціалъ) степени съ **постояннымъ показателемъ** равняется ея показателю, умноженному на ту же степень съ показателемъ на единицу меньшимъ, и на производную (дифференціалъ) основанія, т. е.

$$(u^a)' = au^{a-1}u' \quad \text{и} \quad d(u^a) = au^{a-1}du.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $w = u^a$, имѣемъ $lw = alu$, откуда $\frac{w'}{w} = a\frac{u'}{u}$ и, слѣд., $w' = aw\frac{u'}{u}$, т. е. $(u^a)' = au^{a-1}u'$, а затѣмъ, конечно, $d(u^a) = au^{a-1}du$.

Слѣдствіе — Теорема IX. Производная (дифференціалъ) корня равняется отношенію производной (дифференціала) подкореннаго къ показателю корня и къ корню той же степени изъ **прежняго** подкореннаго, возвышеннаго въ степень, на единицу низшую показателя **корня**, ибо

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}u' = \frac{u^{\frac{1-n}{n}}}{n}u' = \frac{u'}{nu^{\frac{n-1}{n}}},$$

т. е. $$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad \text{и, слѣд.,} \quad d\sqrt[n]{u} = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

Частный случай. Производная (дифференціалъ) корня **квадратнаго** равняется отношенію производной (дифференціала) подкореннаго къ удвоенному тому же корню,

т. е. $$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \text{и} \quad d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Прим. 1. $$\left(\sqrt[3]{4x^2 lg\,x}\right)'_x = \frac{(4x^2 lg\,x)'}{3\sqrt[3]{(4x^2 lg\,x)^2}} = \frac{4}{3}\,\frac{lg\,x\,.\,(x^2)' + x^2\,.\,(lg\,x)'}{\sqrt[3]{16x^4(lg\,x)^2}} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{lg\,x\,.\,2x + x^2\frac{M}{x}}{2x\sqrt[3]{2x(lg\,x)^2}} = \frac{2(2\,lg\,x + M)}{3\sqrt[3]{2x(lg\,x)^2}}.$$

Прим. 2. $d\dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{(2x-1)^3}\,d(x^2-3x+1)-(x^2-3x+1)\,d\sqrt[4]{(2x-1)^3}}{\left[\sqrt[4]{(2x-1)^3}\right]^2}=$

$$=\frac{\sqrt[4]{(2x-1)^3}\,.\,(2x-3)\,dx-(x^2-3x+1)\,\dfrac{d\,[(2x-1)^3]}{4\sqrt[4]{[(2x-1)^3]^3}}}{\sqrt[4]{(2x-1)^6}}=$$

$$=\frac{(2x-3)\sqrt[4]{(2x-1)^3}\,dx-(x^2-3x+1)\,.\,\dfrac{3(2x-1)\,.\,2\,dx}{4\sqrt[4]{(2x-1)^9}}}{\sqrt[4]{(2x-1)^6}}=$$

$$=\frac{(2x-3)\sqrt[4]{(2x-1)^3}-(x^2-3x+1)\,.\,\dfrac{3}{2\sqrt[4]{2x-1}}}{\sqrt[4]{(2x-1)^6}}\,dx=$$

$$=\frac{2(2x-3)(2x-1)-3(x^2-3x+1)}{2\sqrt[4]{(2x-1)^7}}\,dx=\frac{5x^2-7x+3}{2(2x-1)\sqrt[4]{(2x-1)^3}}\,dx$$

126. Теорема X. Производная (дифференціалъ) показательной функціи съ **постояннымъ основаніемъ** равняется произведенію той же функціи на Неперовъ логарифмъ ея основанія и на производную (дифференціалъ) показателя, т. е,

$$\left(a^v\right)'=a^v la\cdot v' \qquad \text{и} \qquad d\left(a^v\right)=a^v la\cdot dv.$$

Дѣйствительно, полагая $w=a^v$, имѣемъ $lw=vla$, откуда $\frac{w'}{w}=v'\cdot la$

и, слѣд., $w'=w\cdot v'la$, т. е $\left(a^v\right)'=a^v la\cdot v'$,

а затѣмъ, конечно: $\qquad d\left(a^v\right)=a^v la dv.$

Слѣдствіе. $\qquad \left(e^v\right)'_x=e^v v'_x; \qquad d\left(e^v\right)=e^v dv$

$$\left(e^x\right)'_x=e^x; \qquad d\left(e^x\right)=e^x dx.$$

Прим. $\left(3^{4x^2-5lx}\right)'=3^{4x^2-5lx}\,.\,l3\,.\left(4x^2-5lx\right)'=3^{4x^2-5lx}\,.\,l3\,.\left(8x-\frac{5}{x}\right)=$

$$=\frac{8x^2-5}{x}\,.\,l3\,.\,3^{4x^2-3lx}.$$

127. Теорема XI. Производная (дифференціалъ) показательной функціи **съ перемѣннымъ основаніемъ** есть сумма производныхъ (дифференціаловъ), получаемыхъ въ предположеніи: одинъ разъ, что показатель постояненъ, а другой разъ, что основаніе постоянно.

Дѣйствительно, полагая $w = u^v$,

имѣемъ $\quad lw = vlu$, откуда $\frac{w'}{w} = v \cdot \frac{u'}{u} + lu \cdot v'$

и, слѣд., $\quad w' = w \cdot v \frac{u'}{u} + w \cdot lu \cdot v'$

или $\quad \left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v lu \cdot v'$,

а затѣмъ $\quad d\left(u^v\right) = vu^{v-1}du + u^v lu dv$.

Разсмотрѣніе этихъ выраженій показываетъ, что они составлены какъ разъ по указанному закону; послѣдній получается также еще просто на основаніи теоремъ о производной и о дифференціалѣ функціи сложныхъ чиселъ.

Прим. $d\left(x^{x^x}\right) = d\left[x^{\left(x^x\right)}\right] = x^x \cdot x^{\left(x^x\right)-1} dx + x^{\left(x^x\right)} lx \cdot d\left(x^x\right) =$

$$= x^{x^x + x - 1} dx + x^{x^x} lx \left[x x^{x-1} dx + x^x lx\, dx\right] =$$

$$= x^{x^x + x - 1} \left\{1 + x\, lx + x\, (lx)^2\right\} dx.$$

128. Производныя и дифференціалы тригонометрическихъ функцій опредѣляются слѣдующими формулами:

$$\mathrm{Sin}'u = \mathrm{Cos}\, u \cdot u', \qquad d\,\mathrm{Sin}\, u = \mathrm{Cos} u\, du;$$

$$\mathrm{Cos}'u = -\mathrm{Sin}\, u \cdot u', \qquad d\,\mathrm{Cos}\, u = -\mathrm{Sin}\, u\, du;$$

$$\mathrm{tg}'u = \frac{u'}{\mathrm{Cos}^2 u}, \qquad d\mathrm{tg}u = \frac{du}{\mathrm{Cos}^2 u},$$

$$\mathrm{Cotg}'u = -\frac{du'}{\mathrm{Sin}^2 u}, \qquad d\,\mathrm{Cotg}u = -\frac{du}{\mathrm{Sin}^2 u};$$

$$\mathrm{Sec}'u = \mathrm{Sec}u\ \mathrm{tg}u\ u', \qquad d\,\mathrm{Sec}u = \mathrm{Sec}u\ \mathrm{tg}u\ du;$$

$$\mathrm{Cosec}'u = -\mathrm{Cosec}u\ \mathrm{Cotg}u\ u', \qquad d\,\mathrm{Cosec}u = -\mathrm{Cosec}u\ \mathrm{Cotg}u\ du;$$

Изъ нихъ двѣ первыя выводятся непосредственно; именно, по опредѣленію производной имѣемъ:

$$\text{Sin}'_x u = \text{Пред.} \left[\frac{\text{Sin}(u+\Delta u) - \text{Sin}\, u}{\Delta x}\right]_{\Delta x \ldots o} =$$

$$= \text{Пред.} \left[\frac{2\,\text{Cos}\frac{(u+\Delta u)+u}{2}\,\text{Sin}\frac{\Delta u}{2}}{\Delta x}\right]_{\Delta x \ldots o} =$$

$$= \text{Пред.} \left[2\,\text{Cos}\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\frac{\text{Sin}\frac{\Delta u}{2}}{\Delta x}\right]_{\Delta x \ldots o} =$$

$$= \text{Пред.} \left[2\,\text{Cos}\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\frac{\frac{\Delta u}{2}}{\Delta x}\right]_{\Delta x \ldots o},$$

ибо $\text{Sin}\frac{\Delta u}{2}$ и $\frac{\Delta u}{2}$ эквивалентны; значитъ,

$$\text{Sin}'_x u = \text{Пред.}\ \text{Cos}\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right).\ \text{Пред.}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \text{Cos}\, u.\, u'_x;$$

точно также

$$\text{Cos}'_x u = \text{Пред.} \left[\frac{\text{Cos}(u+\Delta u) - \text{Cos}\, u}{\Delta x}\right]_{\Delta x \ldots o} =$$

$$= \text{Пред.} \left[\frac{-2\,\text{Sin}\frac{(u+\Delta u)+u}{2}\,\text{Sin}\frac{\Delta u}{2}}{\Delta x}\right]_{\Delta x \ldots o} =$$

$$= -\text{Пред.}\left[2\,\text{Sin}\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\frac{\frac{\Delta u}{2}}{\Delta x}\right] = -\text{Пред.}\ \text{Sin}\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right).\ \ \text{Пред.}\ \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= -\text{Sin}\, u.\, u'_x$$

Остальныя формулы получимъ, выражая $\text{tg}\, u$, $\text{Cotg}\, u$ и т. д. помощью $\text{Sin}u$ и $\text{Cos}u$, и примѣняя теорему о дифференцированіи дроби; напр.,

$$d\text{tg}u = d\ \frac{\text{Sin}u}{\text{Cos}u} = \frac{\text{Cos}u d\text{Sin}u - \text{Sin}u d\text{Cos}u}{\text{Cos}^2 u} =$$

$$= \frac{\text{Cos}u\text{Cos}u du - \text{Sin}u(-\text{Sin}u du)}{\text{Cos}^2 u} = \frac{\text{Cos}^2 u + \text{Sin}^2 u}{\text{Cos}^2 u} du = \frac{du}{\text{Cos}^2 u}.$$

Прим. 1. $$d\,l\,(\mathrm{Sin}2x\,\mathrm{Cos}^2x) = \frac{(\mathrm{Sin}2x\,\mathrm{Cos}^2x)'_x}{\mathrm{Sin}2x\,\mathrm{Cos}^2x} =$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}^2x\,(\mathrm{Sin}2x)'_x + \mathrm{Sin}2x\,(\mathrm{Cos}^2x)'_x}{\mathrm{Sin}2x\,\mathrm{Cos}^2x} =$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}^2x\,\mathrm{Cos}2x.2 + \mathrm{Sin}2x(-2\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Sin}x)}{\mathrm{Sin}2x\,\mathrm{Cos}^2x} = \frac{2\,\mathrm{Cos}^2x\,\mathrm{Cos}2x - \mathrm{Sin}^2 2x}{\mathrm{Sin}2x\,\mathrm{Cos}^2x}.$$

Прим. 2. $$\left(\frac{\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{tg}^3 2x}\right)'_x =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}2x\,(\mathrm{Cos}x + \mathrm{Sin}x)'_x - 3\,(\mathrm{Cos}x + \mathrm{Sin}x)\,(\mathrm{tg}2x)'_x}{\mathrm{tg}^4 2x} =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}2x\,(-\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x) - 3\,(\mathrm{Cos}x + \mathrm{Sin}x)\,\frac{2}{\mathrm{Cos}^2 2x}}{\mathrm{tg}^4 2x} =$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}2x\,\mathrm{Cos}2x\,(-\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x) - 6\,(\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x)}{\mathrm{Sin}^2 2x\,\mathrm{tg}^2 2x}.$$

129. Производныя и дифференціалы круговыхъ функцій:

I) Полагая $$y = \mathrm{Arcsin}u$$

при чемъ u само зависитъ отъ x, находимъ:

$$u = \mathrm{Sin}y \quad \text{и, слѣд.,} \quad u'_x = \mathrm{Cos}y \cdot y'_x,$$

откуда $$y'_x = \frac{u'_x}{\mathrm{Cos}y} = \frac{u'_x}{\pm\sqrt{1 - \mathrm{Sin}^2 y}} = \frac{u'_x}{\pm\sqrt{1 - u^2}};$$

и такъ какъ радикалъ въ знаменателѣ выражаетъ Cosinus младшаго Arcsin'a, то онъ всегда положителенъ, а потому

$$\mathrm{Arcsin}'_x u = \frac{u'_x}{\sqrt{1 - u^2}} \quad \text{и, слѣд.,} \quad d\,\mathrm{Arcsin}u = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}},$$

съ условіемъ брать всегда радикалъ со знакомъ „плюсъ“.

II) Полагая $z = \text{Arctg}u$, т. е. $u = tgz$,

имѣемъ: $u'_x = \frac{z'_x}{\text{Cos}^2 z} = \text{Sec}^2 z \cdot z'_x = (tg^2 z + 1) z'_x = (u^2 + 1) z'_x$,

откуда $z'_x = \frac{u'_x}{u^2 + 1}$,

т. е. $\text{Arctg}'_x u = \frac{u'_x}{u^2 + 1}$ и, слѣд., $d\,\text{Arctg}u = \frac{du}{u^2 + 1}$.

III) Полагая $v = \text{Arcsec}u$, т. е. $u = \text{Sec}v$,

получаемъ: $u'_x = \text{Sec}v\; tgv\; v'_x = \pm \text{Sec}v \sqrt{\text{Sec}^2 v - 1}\; v'_x = \pm u \sqrt{u^2 - 1} \cdot v'_x$,

откуда $v'_x = \frac{u'_x}{\pm u \sqrt{u^2 - 1}}$;

но знаменатель выражаетъ произведеніе Secans'a и tang'a младшаго Arcsec'a, которые всегда имѣютъ оба одинъ и тотъ же знакъ, такъ что ихъ произведеніе положительно: поэтому вносятъ u подъ радикалъ и пишутъ, что $\text{Arcsec}'_x u = \frac{u'_x}{\sqrt{u^2 (u^2 - 1)}}$

и, слѣд., $d\,\text{Arcsec}u = \frac{du}{\sqrt{u^2 (u^2 - 1)}}$

при условіи брать всегда радикалъ со знакомъ „плюсъ“

IV) Наконецъ, дифференцируя доказанныя раньше равенства:

$$\text{Arcsin}u + \text{Arccos}u = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Arctg}u + \text{Arccotg}u = \pm \frac{\pi}{2}$$

и $$\text{Arcsec}u + \text{Arccosec}u = \frac{\pi}{2},$$

получаемъ: $d\,\text{Arcsin}u + d\,\text{Arccos}u = 0$ и т. д.,

а слѣд., $d\,\text{Arccos}u = -\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$ и $\text{Arccos}'_x u = -\frac{u'_x}{\sqrt{u^2 - 1}}$,

$$d\,\text{Arccotg}u = -\frac{du}{u^2 + 1} \quad \text{и} \quad \text{Arctg}'_x u = -\frac{u'_x}{u^2 + 1}$$

$$d\,\text{Arccosec}u = -\frac{du}{\sqrt{u^2 (u^2 - 1)}} \quad \text{и} \quad \text{Arccosec}'_x u = -\frac{u'_x}{\sqrt{u^2 (u^2 - 1)}}$$

130. Теорема. *Производная независимаго числа по сложному равна единицѣ, дѣленной на производную сложнаго по независимому;* иначе говоря, y'_x и x'_y *обратны другъ другу по величинѣ.*

Дѣйствительно, *предполагая что ни* x'_y, *ни* y'_x *не равны ни нулю,* ни ∞, *имѣемъ:*

$$x'_y = \text{Пред.}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) = \text{Пред.}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}\right\} = \frac{1}{\text{Пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{y'_x}.$$

Теорема эта часто наз. „*Теоремой о производной отъ обратной функціи*".

131. Для пользованія дифференціальнымъ исчисленіемъ въ приложеніяхъ необходимо *знать наизусть* всѣ, выведенныя выше, формулы; для удобства онѣ собраны въ слѣдующей таблицѣ:

$$d\,(u+v-w) = du + dv - dw;$$

$$d\,(zuv\ldots tw) = uv\ldots w\,.\,dz + zv\ldots wdu + \ldots + zu\ldots tdw;$$

$$d\,\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}, \qquad d\,\frac{u}{v^n} = \frac{vdu - nudv}{v^{n+1}};$$

$$d\left(u^n\right) = nu^{n-1}du; \qquad d\sqrt[n]{u} = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}; \qquad d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}};$$

$$dlgu = M\frac{du}{u}; \qquad dlu = \frac{du}{u};$$

$$d\left(e^u\right) = e^u\,du; \qquad d\left(e^x\right) = e^x\,dx;$$

$$d\left(a^u\right) = a^u\,la\,.\,du; \qquad d\left(u^v\right) = vu^{v-1}\,du + u^v\,lu\,.\,dv;$$

$$d\mathrm{Sin}u = \mathrm{Cos}u\;du, \qquad d\mathrm{Cos}u = -\mathrm{Sin}u\;du;$$

$$d\mathrm{tg}u = \frac{du}{\mathrm{Cos}^2u}, \quad d\mathrm{Cotg}u = -\frac{du}{\mathrm{Sin}^2u};$$

$$d\mathrm{Sec}u = \mathrm{Sec}u\;tgu\;du, \qquad d\mathrm{Cosec}u = -\mathrm{Cosec}u\;\mathrm{Cotg}u\;du;$$

$$d\mathrm{Arcsin}u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad d\mathrm{Arccos}u = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$d\mathrm{Arctg}u = \frac{du}{u^2+1},\quad d\mathrm{Arccotg}u = -\frac{du}{u^2+1};$$

$$d\mathrm{Arcsec}u = \frac{du}{\sqrt{u^2(u^2-1)}};\quad d\mathrm{Arccosec}u = -\frac{du}{\sqrt{u^2(u^2-1)}}.$$

132. Дифференцированіе неявныхъ функцій. Положимъ, что намъ дано ур-ніе $$F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$ при чемъ, при измѣненіи x'а на нѣкоторомъ сплошномъ участкѣ, для каждаго его значенія существуетъ одно (или нѣсколько) вещественныхъ значеній y'а, удовлетворяющихъ ур-нію (1). Эти значенія y'а образуютъ тогда нѣкоторую функцію x'а — напр.,

$$\varphi(x),$$

которая и наз. „**неявною**", опредѣленной ур-іемъ (1): по самому способу возникновенія понятія о ней очевидно, что

$$F[x, \varphi(x)] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Теорема. Если для взятаго значенія аргумента и соотвѣтствующаго ему значенія неявной функціи, опредѣляемой ур-іемъ (1), функція $F(x, y)$ имѣетъ опредѣленныя и конечныя частныя производныя по x и по y, при чемъ $\frac{\partial F}{\partial y} \gtrless 0$, то неявная функція имѣетъ конечную производ водную по x, опредѣляемую формулой:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Дѣйствительно, такъ какъ y есть сложное число, при чемъ $F(x, y)$ на счетъ него обращается въ постоянную величину (— въ нуль), то имѣемъ $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'_x = 0,$$ откуда и получается выраженіе (3).

Примѣръ. Найти y'_x, зная, что $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Полагая $$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

имѣемъ: $$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(Ax + By + D), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(Bx + Cy + E),$$

а слѣд., $$y'_x = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}.$$

§ 3. Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ.

133. Опредѣленіе 1. Производной n'**го порядка** или просто n'ой **производной** наз. производная отъ $(n$-$1)$'ой производной; эти, такъ наз., производныя высшихъ порядковъ обозначаются такъ: $y''_x, y'''_x, \ldots y^{(n)}_x$,

при чемъ: $y''_x = (y'_x)'_x$; $y'''_x = (y''_x)'_x$; $y^{IV}_x = (y'''_x)'_x$; и т. д.

и очевидно, что

$$y'''_x = (y'_x)''_x; \qquad y^{IV}_x = (y'_x)'''_x = (y''_x)''_x; \text{ и т. д.}$$

Опредѣленіе 2. Дифференціаломъ n'**го порядка** или просто n'ымъ **дифференціаломъ** наз. дифференціалъ отъ $(n-1)$'го дифференціала; онъ обозначается символомъ $d^n u$.

Такимъ образомъ $d^2u=d\ (du)$; $d^3u=d\ (d^2u)$; и т. д.

Такъ какъ, по сдѣланному раньше условію, дифференціалъ аргумента не зависитъ отъ самого аргумента, то, слѣд. его дифференціалъ, т. е. второй, а потому и всѣ послѣдующіе дифференціалы **аргумента** равны нулю.

Теорема: n'ый дифференціалъ функціи равенъ произведенію ея n'ой производной на n'ую степень дифференціала аргумента и, слѣд., есть безк.-малая n'го порядка относительно dx.

Дѣйствительно, имѣя въ виду, что $d\ (dx)=o$, послѣдовательно получаемъ:

$$d^2y = d\ (dy) = d\left(y'_x dx\right) = d\left(y'_x\right) dx = \left[\left(y'_x\right)'_x dx\right] dx = y''_x dx^2;$$

$$d^3y = d\ (d^2y) = d\left(y''_x dx^2\right) = d\left(y''_x\right) dx^2 = \left[\left(y''_x\right)'_x dx\right] dx^2 = y'''_x dx^3,$$

и т. д.

наконецъ, $$d^n y = y^{(n)}_x dx^n.$$

134. Найдемъ выраженія производныхъ высшихъ порядковъ отъ нѣкоторыхъ простѣйшихъ функцій.

1) Очевидно, что n'ая производная алгебрической

суммы конечнаго числа функцій равна такой же алгебрической суммѣ ихъ n'ыхъ производныхъ.

2) $y = (ax + b)^m$. Непосредственно находимъ:

$$y'_x = m\left(ax + b\right)^{m-1} a; \qquad y''_x = m\left(m-1\right)\left(ax + b\right)^{m-2} a^2; \qquad \text{и т. д.:}$$

наконецъ,

$$\left[\left(ax + b\right)^m\right]^{(n)}_x = m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\ldots\left(m-n+1\right)\left(ax+b\right)^{m-n} . a^n.$$

3) $y = a^{\alpha x}$. Опять таки непосредственно получаемъ:

$$y'_x = a^{\alpha x}\, \alpha l a; \qquad y''_x = a^{\alpha x}\left(\alpha l a\right)^2; \qquad \text{и т. д.;}$$

наконецъ,

$$\left(a^{\alpha x}\right)^{(n)}_x = \left(\alpha l a\right)^n a^{\alpha x};$$

въ частности, очевидно:

$$e^x = \left(e^x\right)' = \left(e^x\right)'' = \left(e^x\right)''' = \ldots$$

4) $y = lx$. Во первыхъ, имѣемъ, что $y'_x = \frac{1}{x}$;

поэтому

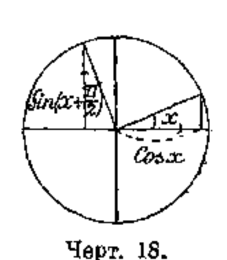
$$y''_x = \left(\frac{1}{x}\right)'_x = -\frac{1}{x^2}; \quad y'''_x = -\left(\frac{1}{x^2}\right)'_x = -\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \left(-1\right)^2 \frac{1.2}{x^3};$$

$$y^{IV}_x = \left(-1\right)^2 1.2 \left(\frac{1}{x^3}\right)'_x = \left(-1\right)^2 1.2\left(-\frac{3}{x^4}\right) = \left(-1\right)^3 \frac{1.2.3}{x^4}; \text{ и т. д.;}$$

наконецъ,

$$l^{(n)}_x x = \left(-1\right)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \qquad \text{при } n > 1.$$

5) $y = \operatorname{Sin} x$. Равенство $\operatorname{Sin}'_x x = \operatorname{Cos} x$,



Черт. 18.

можно переписать такъ

$$\operatorname{Sin}'_x x = \operatorname{Sin}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

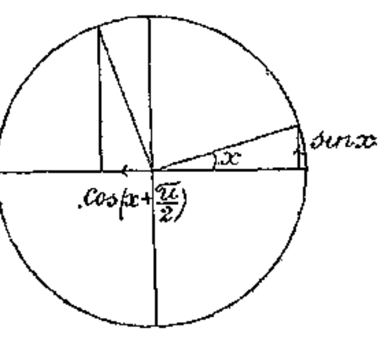
поэтому $\operatorname{Sin}''_x x = \operatorname{Sin}'_x\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Sin}\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\operatorname{Sin}'''_x x = \operatorname{Sin}'_x\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Sin}\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right) \text{ и т. д.;}$$

наконецъ, $$\mathrm{Sin}^{(n)}_x\, x = \mathrm{Sin}\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right).$$

6) $y = \mathrm{Cos}x$. Совершенно такъ же:

$$\mathrm{Cos}'_x x = -\mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$



Черт. 19.

а слѣд.,

$$\mathrm{Cos}''_x x = \mathrm{Cos}'_x\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Cos}\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathrm{Cos}'''_x x = \mathrm{Cos}'_x\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Cos}\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right)$$

и т. д.;

наконецъ, $$\mathrm{Cos}^{(n)}_x x = \mathrm{Cos}\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

135. Формула Лейбница. Эта формула, дающая выраженіе n'ой производной отъ произведенія двухъ множителей—символическая; она пишется такъ:

$$(u\,v)^{(n)}_x \infty (u + v)^n$$

при условіи замѣнить, по развертываніи бинома, каждую степень числа u или v соотвѣтствующей его производной, а нулевую степень—самимъ числомъ.

Для доказательства ея справедливости, повѣримъ ее сначала на частныхъ случаяхъ; а затѣмъ докажемъ, что если она справедлива для n'ой производной, то будетъ вѣрна и для $(n+1)$'ой.

Непосредственно, находимъ:

$$(u+v)^1 = u^1 + v^1 = v^0 u' + u^0\, v' \infty\, v u'_x + u v'_x = (uv)'_x,$$

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,uv + v^2 = v^0\,u^2 + 2\,u^1\,v^1 + u^0\,v^2 \infty\, v u''_x +$$

$$+ 2\,u'_x\,v'_x + u v''_x = v u''_x + u'_x\,v'_x + u'_x\,v'_x + u v''_x = \left(v u'_x\right)'_x +$$

$$+ \left(u v'_x\right)'_x = \left(v u'_x + u v'_x\right)'_x = \left[(uv)'_x\right]'_x = (uv)''_x;$$

допустимъ теперь, что

$$(uv)^{(n)}_x \infty\, u^n + c^1_n\, u^{n-1}\, v + c^2_n\, u^{n-2}\, v^2 + \ldots + v^n,$$

т. е. $$(uv)^{(n)}_x = u^{(n)}_x\, v + c^1_n\, u^{(n-1)}\, v'_x + c^2_n\, u^{(n-2)}_x\, v''_n + \ldots + u v^{(n)}_x;$$

тогда $(uv)_x^{(n+1)} = u_x^{(n+1)}\, v + u_x^{(n)}\, v'_x$

$$+ C_n^1\, u_x^{(n)}\, v'_x + C_n^1\, u_x^{(n-1)}\, v''_x$$

$$+ C_n^2\, u_x^{(n-1)}\, v''_x + C_n^2\, u_x^{(n-2)}\, v'''_x +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots ,$$

т. е. $$(uv)_x^{(n+1)} = u_x^{(n+1)}\, v + C_{n+1}^1\, u_x^{(n)}\, v'_x +$$

$$+ C_{n+1}^2\, u_x^{(n-1)}\, v''_x + \dots + uv_x^{(n+1)}$$

или, слѣд., $$(uv)_x^{(n+1)} \infty (u+v)^{n+1}.$$

Прим. $(x^2 \sin x)'''_x \infty (x^2 + \sin x)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2 \sin x + 3(x^2)\sin^2 x + \sin^3 x \infty$

$$\infty \sin x\, (x^2)''' + 3 \sin' x\, (x^2)'' + 3\, (x^2)' \sin'' x + x^2 \sin''' x =$$

$$= \sin x\; 2 \cdot 0 + 3 \cos x \cdot 2 + 3 \cdot 2x \cdot (-\sin x) + x^2 \cdot (-\cos x) =$$

$$= 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x.$$

ГЛАВА VII.

Теоремы Лагранжа, Ролля и Коши.

136. Лемма. Если на участкѣ (a, b) производная функціи все время положительна, то функція на немъ **растетъ** вмѣстѣ съ x; а если производная все время отрицательна, то функція при **увеличеніи** x'а **убываетъ**.

Дѣйствительно, такъ какъ $y'_x = \text{Пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x + \varepsilon$, гдѣ ε идетъ къ нулю вмѣстѣ съ Δx; поэтому, когда $y'_x > 0$,

то и
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0,$$

т. е. Δy и Δx имѣютъ одинаковые знаки; когда же $y'_x < 0$, то и $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, а слѣд., Δy и Δx имѣютъ противоположные знаки.

Слѣдствіе. Если на участкѣ (a, b) производная одной функціи больше производной другой при одинаковыхъ величинахъ аргумента, начальныя же величины функцій одинаковы, то и величины самой первой функціи на этомъ участкѣ больше соотвѣтствующихъ величинъ второй. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что

Черт. 20.

$$f(a) = \varphi(a); \quad \text{а} \quad f'(x) > \varphi'(x) \text{ при всякомъ } x \geqslant a;$$

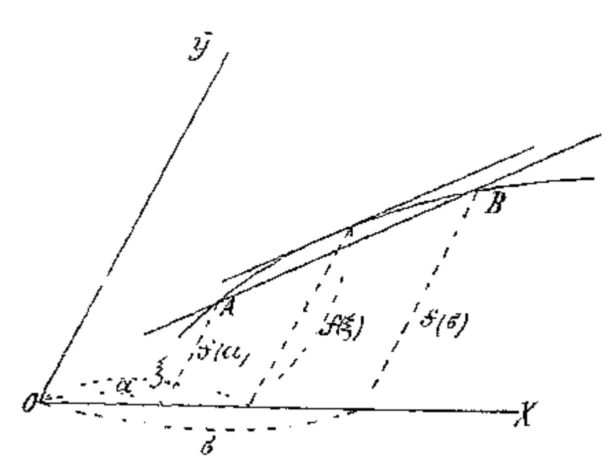
тогда
$$f'(x) - \varphi'(x) > 0, \quad \text{т. е.} \quad \Big[f(x) - \varphi(x)\Big]'_x > 0$$

на всемъ участкѣ (a, b) и, слѣд., $f(x) - \varphi(x)$ растетъ вмѣстѣ съ x; а

такъ какъ при $x=a$ эта разность равна нулю, то, при всѣхъ послѣдующихъ x'ахъ она >0, т. е. $f(x)>\varphi(x)$ при всякомъ $x>a$.

Эта теорема наглядно поясняется черт. 21-мъ, на которомъ видно, что кривая $y=f(x)$ идетъ выше кривой $y=\varphi(x)$

137. Теорема Лагранжа. Если функція $f(x)$ и ея производная непрерывны (и, слѣд., опредѣлены) на всемъ участкѣ (a, b), то отношеніе полнаго приращенія функціи къ соотвѣтствующему приращенію аргумента равно величинѣ ея производной при нѣкоторомъ **среднемъ** значеніи аргумента, т. е.



Черт. 21.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \text{гдѣ}\ a<\xi<b.$$

Построимъ кривую, выражаемую ур-ніемъ $y=f(x)$, и проведемъ сѣкущую черезъ точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$; ея ур-ніе напишется

такъ: $\frac{x-a}{b-a}=\frac{Y-f(a)}{f(b)-f(a)}$, откуда $Y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$;

правую часть послѣдняго ур-нія обозначимъ черезъ $\varphi(x)$, такъ что

$$\varphi(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

и, слѣд.,
$$\varphi'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Далѣе возможны два случая:

1) $f'(x)\equiv\varphi'(x)$, т. е. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\equiv f'(x)$;

тогда доказываемое равенство существуетъ даже не при одномъ промежуточномъ значеніи x'а, а при всякомъ.

2) $f'(x) \neq \varphi'(x)$; въ такомъ случаѣ разность $f'(x) - \varphi'(x)$

или
$$f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

непремѣнно должна на участкѣ (a, b) перемѣнить знакъ, такъ какъ, если бы, напр., все время было $f'(x) \geqslant \varphi'(x)$, то, имѣя въ виду, что $f(a) = \varphi(a)$, мы на основаніи слѣдствія изъ предъидущей леммы заключили бы, что $f(b) > \varphi(b)$, между тѣмъ какъ по условію

$$f(b) = \varphi(b).$$

Итакъ, $f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ на участкѣ (a, b) мѣняетъ знакъ; а такъ какъ эта функція непрерывна, то, по теоремѣ Коши (№ 101) и заключаемъ, что

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

при чемъ ξ — число, промежуточное между a и b.

Геометрическое выраженіе теоремы Лагранжа. Такъ какъ дробь $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ выражаетъ угловой коэфиціентъ хорды AB, а $f'(x)$ есть угловой коэфиціентъ касательной въ точкѣ (x, y), то можемъ теорему Лагранжа выразить такъ: если дуга AB кривой непрерывна и направленіе касательной къ ней при перемѣщеніи точки касанія измѣняется также непрерывно, то касательная въ нѣкоторой **промежуточной** точкѣ дуги параллельна ея хордѣ.

138. Слѣдствіе 1. Формула Лагранжа.

Полагая $b = a + h$, имѣемъ $a < \xi < a + h$ и, слѣд., $\xi = a + \theta h$, гдѣ θ — правильная положительная дробь; поэтому, равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

можно переписать такъ:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h)$$

или
$$\mathbf{f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h)}.$$

Это и есть формула Лагранжа, существующая, очевидно,

при условіи, что $f(x)$ и $f'(x)$ были непрерывны на участкѣ $a, a+h$).

139. Слѣдствіе 2. Если производная функціи, завѣдомо непрерывной, тожественно равна нулю на нѣкоторомъ участкѣ, то эта функція сохраняетъ на немъ постоянное значеніе, ибо тогда $f'(a+\theta h) = 0$ при всякомъ h и, слѣд., по формулѣ Лагранжа:

$$f(a+h) - f(a) = 0, \quad \text{или} \quad f(a+h) = f(a),$$

т. е.

$$f(x) = f(a).$$

Отсюда, въ свою очередь, вытекаетъ, что двѣ непрерывныя функціи, производныя коихъ тожественно равны, могутъ различаться лишь постояннымъ слагаемымъ, такъ какъ производная ихъ разности тожественно равна нулю и, слѣд., сама разность представляетъ число постоянное.

140. Теорема Ролля. Если функція $f(x)$ и ея производная непрерывны (и, слѣд., опредѣлены) на всемъ участкѣ (a, b), при чемъ крайнія значенія функціи одинаковы, т. е. $f(a) = f(b)$, то ея производная обращается въ нуль хоть при одномъ **промежуточномъ** между a и b значеніи аргумента

Черт. 22.

Дѣйствительно. такъ какъ

$$f(b) = f(a),$$

то изъ теоремы Лагранжа:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

слѣдуетъ, что $\qquad f'(\xi) = 0$, при чемъ $a < \xi < b$.

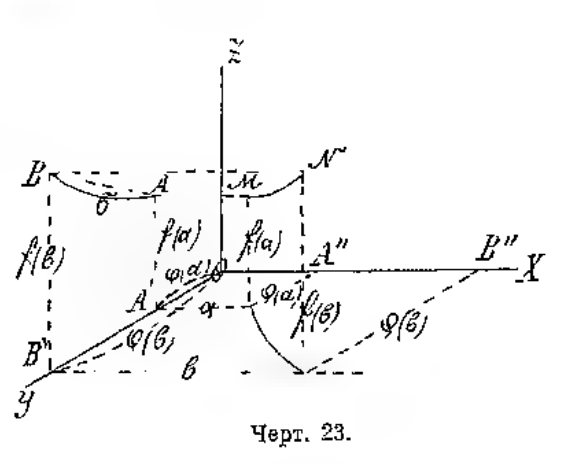
Геометрическое выраженіе теоремы Ролля, очевидно, таково: если дуга AB кривой непрерывна и касательная мѣняетъ свое направленіе также непрерывно, а хорда ея параллельна оси абсциссъ, то хоть въ одной промежуточной точкѣ касательная тоже параллельна оси абсциссъ. Въ такомъ видѣ эта теорема, очевидно, есть частный случай теоремы

Лагранжа — именно, когда ось абсциссъ выбрана параллельною хордѣ дуги $A\ B$.

141. Теорема Коши. Если функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$, а также ихъ производныя непрерывны (и, слѣд., опредѣлены) на всемъ участкѣ (a, b), при чемъ $\varphi'(x)$ не обращается на немъ ни разу въ нуль, то отношеніе полныхъ приращеній функцій равно отношенію величинъ ихъ производныхъ при нѣкоторомъ **промежуточномъ** значеніи аргумента,

т. е. $$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad \text{гдѣ } a < \xi < b.$$

Построивъ въ пространствѣ кривую, $M\ N$, выражаемую ур—ми $y = \varphi(x)$, $z = f(x)$, спроектируемъ ее на плоскость YOZ, что даетъ кривую σ. Такъ какъ функціи $\varphi(x)$ и $f(x)$ непрерывны, то будетъ непрерывна и кривая $M\ N$, а, слѣд., и ея проекція σ, при чемъ вся она будетъ заключаться между прямыми $A'A$ и $B'B$, ибо по условію $\varphi'(x)$ не обращается въ нуль и, слѣд., сохраняетъ знакъ, а потому y при увеличеніи x мѣняется все время въ одномъ направленіи. Съ другой



Черт. 23.

стороны изъ равенства $$z'_x = z'_y \cdot y'_x$$

выводимъ, что $$z'_y = \frac{z'_x}{y'_x} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)};$$

и такъ какъ по условію $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ вдоль дуги MN непрерывны, при чемъ $\varphi'(x)$ не обращается въ нуль, что z'_y вдоль этой дуги или, иначе, вдоль дуги σ мѣняется непрерывно. Изъ всего этого выводимъ, что къ дугѣ σ можемъ примѣнить теорему Лагранжа, что даетъ:

$$\frac{B'B - A'A}{A'B'} = \left(z'_y\right)_{y = \eta}, \text{ гдѣ } OA' < \eta < OB'$$

или $$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{y = \eta}, \text{ гдѣ } \varphi(a) < \eta < \varphi(b),$$

(при чемъ такихъ чиселъ η можетъ оказаться и нѣсколько).

Но такъ какъ по условію $\varphi(x)$ на участкѣ (a, b) непрерывна и, какъ указано выше, мѣняется все время въ одномъ направленіи, то она проходитъ на немъ черезъ всѣ величины, промежуточныя между $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, и при томъ по одному разу, т. е. между a и b непремѣнно есть такое, при томъ единственное, значеніе ξ, при которомъ

$$\varphi(\xi) = \eta,$$

а слѣд.,

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

при чемъ

$$a < \xi < b.$$

ГЛАВА VIII.

Безконечные ряды.

§ 1. О сходимости рядовъ.

142. Опредѣленіе 1. Безконечнымъ рядомъ или просто **рядомъ**, а также **строкой** наз. совокупность безконечно-большаго числа членовъ, соединенныхъ другъ съ другомъ знаками $+$ или $-$:

$$u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_5 - u_6 \ldots + u_k - u_{k+1} + \ldots$$

Опредѣленіе 2. Рядъ наз. **сходящимся**, когда сумма S_n его первыхъ n членовъ стремится къ опредѣленному и единственному предѣлу при увеличеніи n до ∞, **по какому угодно закону**; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ, т. е. когда S_n растетъ до ∞ вмѣстѣ съ n, либо пред. S_n зависитъ отъ закона увеличенія n, рядъ наз. **расходящимся.**

Простѣйшій примѣръ ряда—безконечная геометрическая прогрессія:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots \qquad \ldots \ldots \ldots (1);$$

для нее, полагая $\quad S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1},$

имѣемъ, какъ извѣстно, что если только $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}\, a.$$

Считая дальше, для опредѣленности рѣчи, что $a > 0$, заключаемъ, что если $|q| < 1$, то рядъ (1) будетъ сходящимся, ибо Пред. $\left(S_n\right)_{n \ldots \infty} = \frac{a}{1-q}$, такъ какъ тогда Пред. $\left(q^n\right)_{n \ldots \infty} = 0$.

Если $q > 1$, то S_n растетъ до $+\infty$ вмѣстѣ съ n, такъ что рядъ (1)—расходящійся.

Если $q = 1$, то S_n тоже растетъ до $+\infty$, ибо тогда просто $S_n = an$; значитъ, и въ этомъ случаѣ рядъ (1)—расходящійся.

Если $q = -1$, то $S_n = a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1} a$

и, слѣд.,
$$S_{2m} = 0, \quad а \quad S_{2m+1} = a,$$

такъ что Пред. $\left(S_n\right)_{n=\infty}$ зависитъ отъ закона увеличенія n; слѣд., рядъ (1) опять таки расходящійся.

Наконецъ, когда $q < -1$, то

$$\left(q^{2m}\right)_{m=\infty} = +\infty, \quad а \quad \left(q^{2m+1}\right)_{m=\infty} = -\infty,$$

а слѣд., и $\left(S_n\right)_{n=\infty}$ равно либо $+\infty$, либо $-\infty$, такъ что и въ этомъ случаѣ рядъ (1)—расходящійся.

Итакъ, безконечная геометрическая прогрессія представляетъ рядъ сходящійся тогда, и только тогда, когда ея знаменатель—**правильная** дробь (положительная или отрицательная все равно).

Опредѣленіе 3. Суммою S сходящагося ряда наз. предѣлъ суммы S_n его первыхъ n членовъ:

$$\mathbf{S} = \textbf{Пред.}\left(\mathbf{S_n}\right)_{n=\infty}$$

143. Теорема 1. Чтобы рядъ былъ сходящимся, **необходимо** стремленіе къ нулю его такъ наз. **„общаго члена“** u_n при увеличеніи n до ∞.

Въ самомъ дѣлѣ, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$

и слѣд.,
$$\text{Пред.}\left(S_n\right)_{n=\infty} = \text{Пред.}\left(S_{n-1}\right)_{n=\infty} + \text{Пред.}\left(u_n\right)_{n=\infty};$$

а такъ какъ по опредѣленію сходящагося ряда, имѣемъ:

$$\text{Пред.}\left(S_n\right)_{n=\infty} = \text{Пред.}\left(S_{n-1}\right)_{n=\infty},$$

то, значитъ,
$$\text{Пред.}\left(u_n\right)_{n=\infty} = 0.$$

Указанное условіе еще не достаточно, что легко повѣрить на такъ наз. „гармоническомъ рядѣ“:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots,$$

ибо, написавъ его такъ:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{33}+\ldots\right.$$

видимъ, что всѣ члены каждой суммы въ скобкахъ—больше послѣдняго изъ нихъ, знаменатель же его вдвое больше ихъ числа; поэтому каждая сумма въ скобкахъ больше $\frac{1}{2}$, а слѣд., сумма всего ряда больше $\infty\cdot\frac{1}{2}$, т. е. и сама $=\infty$.

144. Теорема 2. Чтобы рядъ былъ сходящимся, необходимо и **достаточно**, чтобы сумма k его членовъ, начиная съ u_{n+1}, т. е.

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k},$$

стремилась къ нулю при увеличеніи n до ∞, **каково бы ни было k** (хотя бы даже оно само росло до ∞ и при томъ несравнимо быстрѣе, чѣмъ n).

Въ самомъ дѣлѣ по теоремѣ № 55-го условіе, необходимое и достаточное для того, что бы S_n при n, растущемъ безгранично, стремилось къ опредѣленному предѣлу, состоитъ въ томъ, что

$$\text{Пред.}\left(S_{n+k}-S_n\right)_{n\ldots\infty}=0 \text{ при всякомъ } k;$$

а какъ разъ: $S_{n+k}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}$.

145. Теорема 3. При изслѣдованіи **сходимости** ряда можно отбросить любое **конечное** число его первыхъ членовъ, ибо изъ равенства:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_m+\left(u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_n\right)$$

или $\quad S_n=S_m+\sigma_n$, гдѣ $\sigma_n=u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{m+n}$,

слѣдуетъ, что если σ_n при увеличеніи n до ∞ имѣемъ опредѣленный предѣлъ, то имѣетъ его при этомъ и S_n; и обратно.

146. Опредѣленіе 4. Рядъ наз. **знакопостояннымъ**, когда всѣ члены его, **начиная съ нѣкотораго**, положительны; и **знакоперемѣннымъ**, когда они, тоже **начиная съ нѣкотораго**, поочередно то положительны, то отрицательны.

Очевидно (на основаніи послѣдней теоремы), что въ знакопостоянномъ ряду — постоянство знаковъ членовъ, а въ знакоперемѣнномъ — ихъ правильное чередованіе мы можемъ, **при изученіи сходимости**, предполагать съ перваго же члена (отбросивъ, въ случаѣ надобности, предшествующіе члены).

Замѣтимъ еще, что, перемѣнивъ въ случаѣ надобности знаки всѣхъ членовъ ряда, можемъ въ знакопостоянномъ ряду всѣ его члены, а въ знакоперемѣнномъ — первый изъ нихъ считать положительнымъ.

147. Лемма. Если члены одного ряда съ положительными членами $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ . . . . (u),

начиная съ нѣкотораго, меньше соотвѣтствующихъ членовъ другаго ряда съ положительными членами

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \qquad (v),$$

то первый будетъ сходящимся, если второй — сходящійся, и наоборотъ второй будетъ расходящимся, если первый — расходящійся.

Дѣйствительно, пусть $u_k < v_k$ при всякомъ $k \geqslant m$,

тогда
$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_k + \ldots < v_m + v_{m+1} + v_{m+2} + \ldots + v_k + \ldots$$

поэтому, если рядъ (v) — сходящійся, такъ что его сумма S_n не растетъ безгранично при увеличеніи n, то не будетъ такъ рости и сумма σ_n ряда (u); а такъ какъ, однако, послѣдняя растетъ все время вмѣстѣ съ n, то она стремится при этомъ къ опредѣленному единственному предѣлу, т. е. и рядъ (u) — сходящійся.

Наоборотъ, если рядъ (u) — расходящійся, то его сумма σ_n растетъ безгранично вмѣстѣ съ n; тѣмъ болѣе, значитъ, сумма S_n ряда (v) растетъ безгранично вмѣстѣ съ n, т. е. и рядъ (v) — расходящійся.

Примѣръ 1 Такъ какъ гармоническій рядъ — расходящійся, то тѣмъ болѣе будетъ расходящимся рядъ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$,

Примѣръ 2. Рядъ $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ — сходящійся, ибо его члены меньше соотвѣтственныхъ членовъ ряда

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \cdots,$$

для котораго имѣемъ

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

и, слѣд., пред. $(S_n)_{n=\infty} = 1$, такъ что онъ — сходящійся.

148. Теорема 4 — признакъ Даламбера *) Если предѣлъ отношенія общаго члена **знакопостояннаго ряда** къ предъидущему, т. е. Пред. $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ меньше 1, то рядъ — сходящійся; а если этотъ предѣлъ больше 1, то рядъ — расходящійся.

Дѣйствительно, пусть Пред. $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n=\infty} = p$; **если p < 1**, то, взявъ произвольно число q, промежуточное между p и 1, такъ что $p < q < 1$, можемъ найти такое число m, что отношеніе $\frac{u_{k+1}}{u_k}$, стремясь къ p при увеличеніи k, будетъ меньше q при всякомъ $k \geqslant m$; тогда

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < q \qquad \text{или} \qquad u_{m+1} < q\,u_m,$$

$$\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} < q \qquad \text{или} \qquad u_{m+2} < q\,u_{m+1} < q^2 u_m,$$

$$\frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} < q \qquad \text{или} \qquad u_{m+3} < q\,u_{m+2} < q^3 u_m,$$

и т. д.,

такимъ образомъ члены даннаго ряда, начиная съ u_{m+1}, меньше соот-

---

*) Признаками сходимости наз. простые аналитическіе пріемы для сужденія о томъ, будетъ ли рядъ сходящимся или расходящимся.

вѣтствующихъ членовъ сходящейся (ибо $q < 1$) геометрической прогрессіи

$$q u_m + q^2 u_m + q^3 u_m \ldots;$$

отсюда, на основаніи предъидущей леммы, и заключаемъ, что даный рядъ—сходящійся.

Наоборотъ, **если $p > 1$**, то при достаточно большомъ n отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ настолько приблизится къ своему предѣлу p, что будетъ уже затѣмъ само всегда > 1, такъ что дальнѣйшіе члены ряда окажутся возростающими; а мы знаемъ уже, что рядъ въ этомъ случаѣ—расходящійся.

Такое же заключеніе получимъ, очевидно, когда

$$\text{Пред.}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\,..\,\infty} = 1,$$

при чемъ отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ 1, **убывая**; тогда, вѣдь, тоже оно, начиная съ нѣкотораго мѣста, всегда > 1.

Если же
$$\text{Пред.}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\,..\,\infty} = 1,$$

при чемъ отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ 1, **возрастая**, то сказать на основаніи признака Даламбера—будетъ-ли рядъ сходящимся или расходящимся, нельзя; по этой причинѣ случай этотъ наз. „сомнительнымъ случаемъ признака Даламбера".

Прим. 1 Рядъ $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

—сходящійся при всякомъ x'ѣ, ибо для него

$$\text{Пред.}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\,..\,\infty} = \text{Пред.}\left\{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right\}_{n\,..\,\infty} = \text{Пред.}\left(\frac{x}{n+1}\right)_{n\,..\,\infty} = 0.$$

Прим. 2. Рядъ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

—расходящійся, при чемъ для него

$$\text{Пред.}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \text{Пред}\left(\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n}\right) = \text{Пред.}\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\ldots\infty} =$$

$$= \text{Пред.}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)_{n\ldots\infty} = 1$$

и отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, очевидно, растетъ вмѣстѣ съ n

Прим. 3. Для ряда $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$

имѣемъ, что $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2,$$

такъ что это отношеніе растетъ вмѣстѣ съ n, имѣя предѣломъ единицу, а между тѣмъ онъ, какъ мы видѣли въ въ № 147-мъ,—сходящійся.

149. Ошибка и поправка при пользованіи знакопостоянными рядами. Положимъ, что вмѣсто суммы S всего ряда мы взяли только сумму S_n его первыхъ n членовъ; тогда, очевидно, мы сдѣлали ошибку, для уничтоженія коей надо къ S_n добавить **поправку** δ_n,

при чемъ $$\delta_n = \text{Пред}\left(u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}\right)_{k\ldots\infty}$$

Теорема. Поправка δ_n въ случаѣ ряда съ положительными членами сама положительна и меньше послѣдняго, принятаго во вниманіе, члена u_n, умноженнаго на дробь $\frac{\theta_n}{1-\theta_n}$ гдѣ θ_n наибольшее значеніе дроби $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ при различныхъ $k \geqslant n$, т. е. $\delta_n < u_n \frac{\theta_n}{1-\theta_n}$.

(Очевидно, что **ошибка** при замѣнѣ S черезъ S_n отличается отъ поправки δ_n **лишь знакомъ**).

Дѣйствительно, во-первыхъ, что δ_n — положительна, ясно само собой, ибо всѣ члены ея положительны; а во-вторыхъ, изъ опредѣленія θ_n слѣдуетъ,

что $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \theta_n, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \leqslant \theta_n; \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} \leqslant \theta_n; \quad \text{и т. д.}$$

или $$u_{n+2} \leqslant \theta_n \cdot u_n \cdot u_{n+2} \leqslant \theta_n \cdot u_{n+1} \leqslant \theta^2_n u_n;$$

$$u_{n+3} \leqslant \theta_n u_{n+2} \leqslant \theta^3_n u_n, \quad \text{и т. д.},$$

а слѣд., $$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \leqslant u_n + \theta_n u_n + + \theta^2_n u_n + \theta^3_n u_n + \ldots,$$

т. е. $$\delta_n \leqslant u_n \frac{\theta_n}{1-\theta_n}.$$

Замѣчаніе. Если отношеніе $\frac{u_{k+1}}{u_k}$, начиная съ $k = n$, все время растетъ, то, очевидно,

$$\theta_n = \text{Пред.} \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)_{k\ldots\infty};$$

если же это отношеніе все время убываетъ,

то $$\theta_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Прим. 1. Рядъ $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$,

выражающій число e, какъ мы знаемъ, сходящійся; при этомъ отношеніе

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{(k+1)!} : \frac{1}{k!} = \frac{1}{k+1}$$

и, слѣд., убываетъ при увеличеніи k; поэтому,

если сумму $$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

возьмемъ за приближенную величину числа e, то $\theta_n = \frac{1}{n+1}$ и, слѣд., поправка

$$\delta_n \leqslant \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)-1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}, \text{ т. е. } \delta_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\theta_n}{n},$$

гдѣ $0 < \theta_n < 1$, такъ что $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \cdot \frac{\theta_n}{n}$,

что видѣли и раньше.

Прим. 2. Для ряда $\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^3-1}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}+\ldots$

имѣемъ $\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{1}{2^{k+1}-1}:\frac{1}{2^k-1}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2^{k+1}}}<\frac{1}{2}$,

а Пред. $\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)_{n\ldots\infty}=\frac{1}{2}$, такъ что рядъ этотъ—сходящійся, отношеніе же $\frac{u_{k+1}}{u_k}$, очевидно, растетъ вмѣстѣ съ k, поэтому

$$\theta_n=\text{Пред.}\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)_{n\ldots\infty}=\frac{1}{2}$$

и, слѣд., $$\delta_n<\frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n-1},$$

такъ что можемъ положить $$\delta_n=\frac{\theta}{2^n-1},$$

гдѣ $0<\theta<1$, при чемъ $S=\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{\theta}{2^n-1}$.

150. Ряды незнакопостоянные. Такъ называются ряды, въ которыхъ члены мѣняютъ знакъ, но не по очередно.

Теорема. Незнакопостоянный рядъ будетъ сходящимся, если рядъ, составленный изъ абсолютныхъ величинъ его членовъ, будетъ сходящимся; при этомъ его сумма равна суммѣ всѣхъ его положительныхъ членовъ безъ суммы всѣхъ отрицательныхъ.

Дѣйствительно, обозначимъ черезъ $v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_k$ положительные члены изъ суммы $$u_1+u_2+\ldots+u_n,$$
а черезъ $w_1,\ w_2,\ \ldots\ w_m$—абсолютныя величины ея отрицательныхъ членовъ, такъ что

$$S_n=(v_1+v_2+\ldots+v_k)-(w_1+w_2+\ldots+w_m),$$

при чемъ, конечно, $$k+m=n.$$

Ясно, что k и m растутъ безгранично вмѣстѣ съ n, ибо иначе данный рядъ, начиная съ нѣкотораго мѣста, сталъ бы знакопостояннымъ; кромѣ того, такъ какъ, очевидно:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (v_1 + v_2 + \ldots + v_k) + (w_1 + w_2 + \ldots + w_m),$$

то
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k < |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|$$

и
$$w_1 + w_2 + \ldots + w_m < |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|;$$

но по условію рядъ

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

сходящійся и, слѣд., сумма любаго числа его членовъ конечна; значитъ, тѣмъ болѣе суммы

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k \quad \text{и} \quad w_1 + w_2 + \ldots + w_m$$

остаются конечны; а такъ какъ онѣ растутъ вмѣстѣ съ k и съ m, т. е. вмѣстѣ съ n, то онѣ стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ — напр., S' и S''. Поэтому и

$$\text{Пред.}\left(u_1 + u_2 + \ldots + u_n\right)_{n=\infty} = \text{Пред.}\left(v_1 + v_2 + \ldots + v_k\right)_{k=\infty} +$$

$$- \text{Пред.}\left(w_1 + w_2 + \ldots + w_m\right)_{m=\infty} = S' - S'',$$

что и доказываетъ теорему.

Слѣдствіе. Незнакопостоянный рядъ будетъ сходящимся,

если
$$\text{Пред.}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1.$$

Сходящійся незнакопостоянный рядъ, абсолютныя величины членовъ коего образуютъ тоже рядъ сходящійся, наз. абсолютно-сходящимся; очевидно, что поправка δ_n къ суммѣ S_n первыхъ n членовъ такого ряда меньше соотвѣтствующей поправки для ряда, образованнаго изъ абсолютныхъ величинъ членовъ даннаго ряда.

Незнакопостоянный сходящійся рядъ наз. полусходящимся, если онъ не абсолютно-сходящійся.

Знакоперемѣнные ряды

151. Теорема 1. Если общій членъ u_n знакоперемѣннаго ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \dots$, (гдѣ всѣ числа u_1, u_2, u_3, ... положительны) стремится къ нулю, **все время убывая**, то рядъ будетъ сходящимся.

Дѣйствительно, разсматривая сначала сумму S_{2n} четнаго числа первыхъ членовъ и написавъ, что

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

видимъ, что S_{2n} положительна и растетъ вмѣстѣ съ n, ибо по условію каждый двучленъ въ скобкахъ положителенъ, но это возростаніе не идетъ до ∞, ибо, написавъ, что

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n},$$

видимъ, что по той же причинѣ $S_{2n} < u_1$ при всякомъ n.

Отсюда (№ 52) заключаемъ что S_{2n} при увеличеніи n до ∞ стремится къ опредѣленному предѣлу S; а такъ какъ

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1},$$

то и $$\text{Пред.}\,(S_{2n+1}) = \text{Пред.}\,(S_{2n}) + \text{Пред.}\,(u_{2n}) = S,$$

ибо, по условію, $$\text{Пред.}\,\left(u_{2n+1}\right)_{n=\infty} = 0.$$

Такимъ образомъ, при указанныхъ въ теоремѣ условіяхъ сумма S_m, при любомъ законѣ увеличенія m до ∞, стремится къ опредѣленному и единственному предѣлу S, слѣд., данный рядъ—сходящійся.

Прим. Рядъ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots$

— сходящійся, ибо для него $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ и, слѣд., идетъ къ нулю все время убывая.

Замѣчаніе. Если абсолютныя величины членовъ знакоперемѣннаго ряда, стремясь къ нулю, то убываютъ, то растутъ, то рядъ можетъ оказаться и сходящимся, и расходящимся.

Прим. 1 Рядъ $\sin^2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin^2 3\alpha}{3^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

абсолютно — сходящійся, ибо абсолютныя величины его членовъ меньше соотвѣтственныхъ членовъ сходящагося ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdot \cdot \cdot,$$

между тѣмъ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin^2(n+1)\alpha}{(n+1)^2} : \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \left\{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sin(n+1)}{\sin\alpha}\right\}^2$,

такъ что $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ будетъ то > 1, то < 1, т. е. абсолютныя величины членовъ то растутъ, то убываютъ.

Прим. 2. Для ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \cdots$$

имѣемъ, что каждый положительный членъ больше абсолютной величины предшествующаго ему отрицательнаго члена, ибо

$$\sqrt{n+1}-1 = \sqrt{(\sqrt{n})^2+1}-1 < \sqrt{(\sqrt{n})^2+2\sqrt{n}+1}-1 = \sqrt{(\sqrt{n}+1)^2}-1 = $$
$$= \sqrt{n} < \sqrt{n}+1;$$

но этотъ рядъ—расходящійся, ибо попарное сложеніе его членовъ обращаетъ его въ гармоническій рядъ:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n} + \cdot \cdot \cdot$$

152. Теорема II. Поправка δ_n для перехода отъ суммы S_n первыхъ n членовъ знакоперемѣннаго сходящагося ряда, **удовлетворяющаго условіямъ послѣдней теоремы,** къ суммѣ S всего ряда, имѣетъ знакъ перваго отброшеннаго члена, но меньше него по абсолютной величинѣ, а слѣд., тѣмъ болѣе меньше послѣдняго, принятаго во вниманіе, члена u_n.

Такъ какъ $\delta_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} +$
$$+ (-1)^{n+2} u_{n+3} + \cdot \cdot \cdot,$$

то въ справедливости теоремы убѣдимся, написавъ, что

$$\delta_n = (-1)^n \left\{ (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \dots \right\}$$

и $$\delta_n = (-1)^n \left\{ u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots \right\}$$

и основываясь, какъ въ предъидущемъ №-ѣ, на томъ, что абсолютныя величины всѣхъ членовъ постепенно убываютъ.

Ряды съ комплексными членами.

153 Опредѣленіе 1. Рядъ съ комплексными членами

$$(u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) + \dots + (u_n + v_n i) + \dots$$

наз. сходящимся, если вещественныя части его членовъ и коэфиціенты въ нихъ при i образуютъ отдѣльно ряды сходящіеся

Опредѣленіе 2 Суммою S **сходящагося** ряда съ комплексными членами наз. предѣлъ суммы S_n его первыхъ n членовъ.

Теорема. Въ суммѣ сходящагося ряда съ комплексными членами вещественная часть и коэфиціентъ при i равны соотвѣтственно суммамъ рядовъ образованныхъ вещественными частями членовъ даннаго ряда и коэфиціентами въ нихъ при i. Дѣйствительно, полагая

$$S_n = S'_n + S''_n i = (u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) + \dots + (u_n + v_n i),$$

имѣемъ, какъ извѣстно, что

$$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{и} \quad S''_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n\ ,$$

а слѣд.,

$$S = \text{Пред.}\left(S_n\right)_{n=\infty} = \text{Пред.}\left(S'_n + S''_n i\right)_{n=\infty} = \text{Пред.}\left(S'_n\right)_{n=\infty} + i\,\text{Пред.}\left(S''_n\right)_{n=\infty} =$$
$$= \text{Пред.}\left(u_1 + u_2 + \dots + u_n\right)_{n=\infty} + i\,\text{Пред.}\left(v_1 + v_2 + \dots + v_n\right)_{n=\infty}.$$

Теорема 2. Если модули членовъ комплекснаго ряда образуютъ рядъ сходящійся, то и самъ комплексный рядъ — сходящійся.

Дѣйствительно, обозначивъ черезъ ρ_n модуль члена $u_n + v_n i$,

имѣемъ:
$$\rho_n^2 = u_n^2 + v_n^2,$$

откуда $u_n^2 \leqslant \rho_n^2$ и $v_n^2 \leqslant \rho_n^2$ и, слѣд., $u_n \leqslant \rho_n$ и $v_n \leqslant \rho_n$

поэтому, если рядъ $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n + \ldots$

— сходящійся, то и ряды

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \text{ и } v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

—сходящіеся, а потому будутъ сходящимися (и даже абсолютно—сходящимися) ряды

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \text{ и } v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

т. е. рядъ $(u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) + \ldots + (u_n + v_n i) + \ldots$

§ 2 Разложеніе функцій въ ряды.

154. Формула Тейлора для цѣлаго многочлена. Пусть $f(x)$ есть цѣлый многочленъ n-ой степени; раскрывая скобки и дѣлая приведеніе, получаемъ тожественно:

$$f(a+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + A_4 h^4 + \ldots + A_n h^n \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

гдѣ всѣ коэфиціенты A суть цѣлые многочлены относительно a, но не зависятъ отъ h; поэтому, дифференцируя это равенство последовательно n разъ по h и принимая во вниманіе, что въ лѣвой части стоитъ функція сложнаго числа $a+h$, производная коего по h равна 1, получаемъ:

$$\left.\begin{array}{l} f'(a+h) = A_1 + 2 A_2 h + 3 A_3 h^2 + 4 A_4 h^3 + \ldots + n A_n h^{n-1} \\ f''(a+h) = 2 A_2 + 2.3 A_3 h + 3.4 A_4 h^2 + \ldots + (n-1) n A_n h^{n-2} \\ f'''(a+h) = 2.3 A_3 + 2.3.4 A_4 h + \ldots + (n-2)(n-1) n A_n h^{n-3} \\ \qquad\qquad \text{и т. д.} \\ \text{наконецъ,} \quad f^{(n)}(a+h) = 2.3.4 \ldots (n-2)(n-1) n A_n \end{array}\right\} (2),$$

послѣ чего положеніе $h = 0$ въ равенствахъ (1) и (2) даетъ:

$$f(a) = A_0,\ f'(a) = A_1,\ f''(a) = 2 A_2,\ f'''(a) = 2.3 A_3,\ \ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(a) = 2.3.4 \ldots (n-1) n A_n,$$

откуда $A_0 = f(a)$, $A_1 = \frac{f'(a)}{1}$, $A_2 = \frac{f''(a)}{1.2}$, $A_3 = \frac{f'''(a)}{1.2.3}$, ... $A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{1.2.3 \ldots n}$.

Подставляя эти значенія въ равенство (1), находимъ.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \frac{f'''(a)}{3} h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n \quad \ldots \quad (3).$$

Это и есть формула Тейлора для цѣлаго многочлена, дающая разложеніе $f(a+h)$ по цѣлымъ степенямъ приращенія h.

155 Формула Тейлора вообще. Положимъ, что $f(x)$ есть любая функція, удовлетворяющая лишь условію, что она сама и всѣ ея производныя до $(n+1)$ой включительно непрерывны на участкѣ $(a, a+h)$, и посмотримъ, нельзя ли и въ этомъ случаѣ представить $f(a+h)$ подъ видомъ суммы

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n,$$

для чего обозначимъ разность между ними черезъ R_n, такъ что

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} h + \frac{f''(a)}{1.2} h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2 \ldots n} h^n + R_n \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Это равенство и есть **формула Тейлора** для любой функціи $f(x)$, а R_n наз. ея „остаточнымъ членомъ"; и очевидно, что весь вопросъ—лишь въ томъ, чтобы найти выраженіе для R_n.

Съ этой цѣлью мы представимъ его подъ видомъ произведенія

$$P_n \,.\, h^k,$$

а затѣмъ, положивъ еще

$$a + h = b \text{ и, слѣд., } h = b - a,$$

перенесемъ въ равенствѣ (4) всѣ члены въ лѣвую часть; тогда получимъ

$$f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1}(b-a) - \frac{f''(a)}{1.2}(b-a)^2 - \frac{f'''(a)}{1.2.3}(b-a)^3 \ldots +$$

$$- \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2 \ldots (n-1)}(b-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{1.2.3 \ldots n}(b-a)^n - P_n (b-a)^k = 0 \quad \ldots \quad (5).$$

Обозначимъ теперь черезъ $\varphi(x)$ ту функцію, которая получается изъ лѣвой части послѣдняго ур-нія отъ замѣны a на x, такъ что

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1}(b-x) - \frac{f''(x)}{1.2}(b-x)^2 - \frac{f'''(x)}{1.2.3}(b-x)^3 - \ldots$$

$$- \frac{f^{(n-1)}(x)}{1.2\ldots(n-1)}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n}(b-x)^n - P_n(b-x)^k \quad \ldots \quad (6);$$

тогда

$$\varphi'(x) = -f'(x) - \left[\frac{f''(x)}{1}(b-x) - \frac{f'(x)}{1}\right] - \left[\frac{f'''(x)}{1.2}(b-x)^2 - \frac{f''(x)}{1.2}\cdot 2(b-x)\right] -$$

$$\left[\frac{f^{IV}(x)}{1.2.3}(b-x)^3 - \frac{f'''(x)}{1.2.3}\cdot 3(b-x)^2\right] - \ldots - \left[\frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots(n-1)}(b-x)^{n-1} -\right.$$

$$\left.- \frac{f^{(n-1)}(x)}{1.2\ldots(n-1)}(n-1)(b-x)^{n-2}\right] - \left[\frac{f^{(n+1)}(x)}{1.2\ldots n}(b-x)^n -\right.$$

$$\left.- \frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n}\cdot n(b-x)^{n-1}\right] + P_n\cdot k(b-x)^{k-1};$$

и такъ какъ, очевидно, всѣ члены здѣсь, черезъ одинъ, взаимно сокращаются, кромѣ 3-го съ конца и послѣдняго, то

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{1.2\ldots n}(b-x)^n + P_n\cdot k(b-x)^{k-1} \quad \ldots \quad (7)$$

Это выраженіе, вмѣстѣ съ выраженіемъ (6) для самой функціи $\varphi(x)$, показываетъ, что, вслѣдствіе сдѣланнаго выше условія о непрерывности $f(x)$ и ея производныхъ на участкѣ $(a, a+h)$ т. е. (a, b), будутъ на немъ непрерывны также $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$, если только $k \geqslant 1$ (ибо иначе $\varphi'(x)$ обратится въ ∞ при $x=b$). Но очевидно, что $\varphi(b)=0$, ибо сумма первыхъ двухъ членовъ и каждый изъ послѣдующихъ въ выраженіи (6) при $x=b$ обращаются въ нули; въ то же время и $\varphi(a)=0$, ибо $\varphi(x)$ при $x=a$ превращается обратно въ лѣвую часть ур-нія (5). Поэтому можемъ къ функціи $\varphi(x)$ примѣнить теорему Ролля, т. е. написать, что $\varphi'(\xi)=0$, гдѣ $a<\xi<b$ или $a<\xi<a+h$, т. е. $\xi=a+\theta h$, при чемъ $0<\theta<1$; такимъ образомъ, благодаря выраженію (7), имѣемъ:

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n + P_n\cdot k(b-\xi)^{k-1} = 0,$$

откуда
$$P_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(b-\xi)^{n+1-k}}{k}$$

и, значить, $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{1.2.3...n} \cdot \frac{(b-\xi)^{n+1-k}}{k} h^k;$

замѣняя же здѣсь b и ξ ихъ значеніями $a+h$ и $a+\theta h$, имѣемъ:

$$b - \xi = (a+h) - (a+\theta h) = h - \theta h = (1-\theta) h$$

и, слѣд., $$R_n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{1.2.3...n} \cdot \frac{(1-\theta)^{n+1-k}}{k} h^{n+1} \quad \ldots \quad (8),$$

причемъ θ — правильная положительная дробь, величина коей зависитъ отъ **вида** функціи f и отъ **величины** чиселъ a, h, n и k.

Это выраженіе остаточнаго члена дано Шлемильхомъ: полагая въ немъ $k=1$, получимъ выраженіе, данное Коши:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)}{1.2.3...n} (1-\theta_1)^n h^{n+1},$$

а при $k=n+1$ получимъ выраженіе, данное Лагранжемъ:

$$R_n^a = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_2 h)}{1.2.3...n(n+1)} h^{n+1},$$

при чемъ θ_1 и θ_2 — правильныя, не равныя ни другъ другу, ни дроби θ, положительныя дроби, величины коихъ зависятъ отъ **вида** функціи f и отъ **величины** чиселъ a, h и n.

156. Рядъ Тейлора. Если функція $f(x)$ и ея производныя **какого угодно** порядка непрерывны на участкѣ $(a, a+h)$, а остаточный членъ R_n стремится къ нулю при увеличеніи n до ∞, то можемъ его отбросить, продолживъ зато предшествующую сумму до ∞; при этомъ получаемъ такъ наз. **рядъ Тейлора**:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + \ldots$$

Замѣчаніе. Если $f(x)$ — есть цѣлый многочленъ n'ой степени, то рядъ Тейлора, очевидно, оборвется самъ собой на членѣ съ h^n, ибо тогда $f^{(n)}(x)$ — число постоянное, а слѣд., всѣ слѣдующія производныя тождественно равны нулю.

157. Формула и рядъ Маклорена. Они получаются изъ предшествующихъ замѣною числа a — нулемъ, а h — x'омъ; это даетъ:

Формула Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n,$$

гдѣ $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^{n+1-k}}{1.2.3\dots n\;k}x^{n+1}$ ... остат. чл. Шлемильха

либо $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta' x)}{1.2.3\dots n}(1-\theta')^n x^{n+1}$ ... „ „ Коши,

либо $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta'' x)}{1.2.3\dots n(n+1)}x^{n+1}$ ... „ „ Лагранжа;

и **рядъ Маклорена**:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\dots n}x^n+\dots$$

158. Выраженіе безк.-малаго приращенія функціи посредствомъ ея дифференціаловъ. Если въ формулѣ Тейлора замѣнимъ h, какъ приращеніе аргумента, на dx, то, перенося еще первый членъ правой части въ лѣвую, получимъ:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f'(a)\,dx}{1}+\frac{f''(a)\,dx^2}{1.2}+\frac{f'''(a)\,dx^3}{1.2.3}+\dots+\frac{f^{(n)}(a)\,dx^n}{1.2.3\dots n}+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta\,dx)\,dx^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)};$$

замѣняя же a на x и вспоминая связь между дифференціалами высшихъ порядковъ и соотвѣтствующими производными, выражаемую равенствомъ:

$$d^k f=f^{(k)}(x)\,dx^k$$

можемъ еще написать, что

$$\Delta f=df+\frac{d^2 f}{2!}+\frac{d^3 f}{3!}+\dots+\frac{d^n f}{n!}+\frac{\left[d^{n+1}f\right]_{x=x+\theta dx}}{(n+1)!}.$$

159. Формула и рядъ Тейлора даютъ разложеніе функціи отъ аргумента съ приращеніемъ по цѣлымъ, положительнымъ и возрастающимъ степенямъ этого приращенія; а формула и рядъ Маклорена даютъ раз-

ложеніе самой функціи по подобнымъ же степенямъ самого аргумента.

Для разложенія какой-нибудь функціи въ рядъ Маклорена надо, очевидно:

1) найти аналитическія **выраженія** всѣхъ ея производныхъ;

2) опредѣлить **значенія** функціи и всѣхъ ея производныхъ, при $x = o$;

3) найти **границы значеній** x'а, при которыхъ рядъ

$$f(o) + \frac{f'(o)}{1}x + \frac{f''(o)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(o)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

будетъ сходящимся;

и 4) убѣдиться, что Пред. $(R_n)_{n=\infty} = 0$ при этихъ же значеніяхъ x'а.

Приложимъ это къ нѣкоторымъ простѣйшимъ функціямъ

160. Разложеніе степенной функціи $(1+x)^m$ при какомъ угодно показателѣ m.

Полагая $$f(x) = (1+x)^m,$$

находимъ: $$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},$$

и т. д.,

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

откуда $$f(o) = 1,$$

$$f'(o) = m,$$

$$f''(o) = m(m-1),$$

$$f'''(o) = m(m-1)(m-2),$$

и т. д.,

$$f^{(n)}(o) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1),$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}$$

поэтому рядъ Маклорена для функціи $(1+x)^m$ напишется такъ:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Что бы узнать теперь границы значеній x'а, при какихъ этотъ рядъ будетъ сходящимся, воспользуемся признакомъ Даламбера; такъ какъ

$$u_n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n \text{ и } u_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n(n+1)}x^{n+1},$$

то
$$\text{Пред.}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}_{n=\infty}=\text{Пред.}\left\{\frac{m-n}{n+1}x\right\}_{n=\infty}=$$

$$=\text{Пред.}\left\{\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x\right\}_{n=\infty}=-x,$$

а слѣд., рядъ (1) будетъ сходящимся при $|x|<1$ и расходящимся при $|x|>1$, каково бы ни было m.

Предполагая теперь, что условіе сходимости выполнено, т. е. что

$$\underline{-1<x<1,}$$

разсмотримъ остаточный членъ; беря его подъ видомъ, даннымъ Коши, имѣемъ:

$$R_n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2.3\ldots n}(1+\theta x)^{m-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

или
$$R_n=mA(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x,$$

гдѣ
$$A=\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2.3\ldots n}x^n.$$

Изъ пяти множителей, образующихъ R_n, первый и послѣдній (m и x) суть числа конечныя и не зависятъ отъ n; средній множитель $(1+\theta x)^{m-1}$, хотя и мѣняется вмѣстѣ съ n, но тоже всегда остается конечнымъ, ибо $0<\theta<1$ и $|x|<1$, а слѣд., $1+\theta x$ не

можетъ стать равно нулю. То же можемъ сказать и про четвертый множитель $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, ибо если x положителенъ, то сразу ясно,

что $$1+\theta x > 1-\theta;$$

если же $x<0$, то, полагая $x=-y$, гдѣ, конечно, $0<y<1$, имѣемъ: $1+\theta x=1-\theta y>1-\theta$, ибо $\theta y<\theta$: значитъ, въ обоихъ

случаяхъ $$\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1,$$

а потому и $$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\leqslant 1,$$

наконецъ, множитель A представляетъ, какъ легко видѣть, членъ v_n разложенія $(1+x)^{m-1}$ въ рядъ Маклорена; а такъ какъ этотъ рядъ при $|x|<1$, какъ мы видѣли, будетъ сходящимся при любомъ показателѣ двучлена, то его общій членъ v_n долженъ стремиться къ нулю при увеличеніи n до ∞, т. е. пред. $(A)_{n=\infty}=0$.

Изъ всего этого слѣдуетъ, что пред. $(R_n)_{n=\infty}=0$, а, значитъ, **когда x—правильная положительная или отрицательная дробь, то**

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

при всякомъ m.

Для облегченія запоминанія этого разложенія полезно замѣтить, что коэфиціенты его составлены по тому-же закону, какъ въ формулѣ бинома Ньютона.

Прим. Если $(x)<1$, то $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$,

а замѣна x на $-x$ даетъ

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

161. Извлеченіе корней. Такъ какъ $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$, то, замѣняя въ равенствѣ (2) n на $\frac{1}{m}$, получимъ формулу, дающую разложеніе

$\sqrt[m]{1+x}$ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ x'а при условіи что $x<1$; именно:

$$\sqrt[m]{1+x} = 1 + \frac{\frac{1}{m}}{1}x + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1.2}x^2 + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{1.2.3}x^3 + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{m}-3\right)}{1.2.3.4}x^4 + \dots$$

или $$\sqrt[m]{1+x} = 1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{x}{m} - \frac{m-1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{1.2.3.4}\left(\frac{x}{m}\right)^4 \dots \quad (3).$$

На практикѣ для приближеннаго вычисленія $\sqrt[m]{a}$ изъ даннаго числа a съ помощью разложенія (3), надо представить это число a въ видѣ произведенія $b^m(1+x)$, гдѣ b — нѣкоторое раціональное число, а $x<1$; при этомъ, такъ какъ въ знакоперемѣнномъ ряду легче, какъ мы знаемъ, судить о размѣрахъ поправки δ_n, рядъ-же (3) будетъ знакоперемѣннымъ при $x>0$, то лучше подбирать b такъ, чтобы x вышло положительнымъ, т. е., очевидно, такъ, чтобы удовлетворялись неравенства $b^m < a < 2b^m$, при этомъ рядъ будетъ сходиться тѣмъ быстрѣе, чѣмъ x меньше т. е. чѣмъ a меньше превышаетъ число b^m.

Прим. 1. Вычислить $\sqrt[3]{17}$ съ точностью до 0,01

Такъ какъ $\left(\frac{5}{2}\right)^3 < 17 < 2\left(\frac{5}{2}\right)^3$, то, написавъ, что

$$\sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{11}{8}} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{1+\frac{11}{125}},$$

имѣемъ: $$\sqrt[3]{17} = \frac{5}{2}\left(1+\frac{11}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}\left\{1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{11}{125} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\left(\frac{11}{125}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1.2.3}\left(\frac{11}{125}\right)^3 + \dots\right\} = \frac{5}{2}\left\{1+\frac{11}{375} - \frac{2}{1.2}\left(\frac{11}{375}\right)^2 + \frac{2.5}{1.2.3}\left(\frac{11}{375}\right)^3 - \dots\right\};$$

и такъ какъ этотъ рядъ знакоперемѣнный, то, полагая

$$\sqrt[3]{17} = \frac{5}{2}\left(1 + \frac{11}{375}\right),$$

сдѣлаемъ ошибку меньше, чѣмъ

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{1\cdot2}\left(\frac{11}{375}\right)^2 = \frac{121}{750\cdot75} < \frac{125}{750\cdot75} < \frac{1}{450}$$

слѣд., съ точностью до 0,01 имѣемъ:

$$\sqrt[3]{17} = \frac{5}{2}\left\{1 + 0{,}029\right\} = 2{,}5 + 0{,}07 = 2{,}57$$

Прим. 2. Вычислить $\sqrt[5]{\frac{13}{4}}$ съ точностью до 0,0001.

Такъ какъ $\sqrt[5]{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt[5]{13\cdot4^4}}{4} = \frac{\sqrt[5]{3328}}{4}$, то, слѣд., $\sqrt[5]{3328}$ надо вычислить съ точностью до $\frac{1}{2500}$; но $3328 = 3125 + 203 = 5^5 + 203$,

такъ что
$$\sqrt[5]{3328} = \sqrt[5]{5^5 + 203} = 5\sqrt[5]{1 + \frac{203}{3125}} = 5\left(1 + \frac{203}{3125}\right)^{\frac{1}{5}} =$$

$$= 5\left\{1 + \frac{\frac{1}{5}}{1}\cdot\frac{203}{3125} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{1\cdot2}\left(\frac{203}{3125}\right)^2 + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{203}{3125}\right)^3 + \dots\right\} =$$

$$= 5\left\{1 + \frac{203}{15625} - \frac{4}{1\cdot2}\left(\frac{203}{15625}\right)^2 + \frac{4\cdot9}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{203}{15625}\right)^3 - \dots\right\};$$

и такъ какъ
$$5\cdot\frac{4\cdot9}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{203}{15625}\right)^3 < 5\cdot2\cdot3\left(\frac{1}{70}\right)^3 < \frac{1}{10000},$$

то

$$\sqrt[5]{\frac{13}{4}} = \frac{5}{4}\left\{1 + \frac{203}{15625} - 2\cdot\left(\frac{203}{15625}\right)^2\right\} = \frac{5}{4}\left\{1 + 0{,}01299 - 0{,}00034\right\} = \frac{5}{4}\cdot1{,}01265 = 1{,}2658$$

съ точностью до 0,0001.

162. Разложеніе $l(1+x)$. Полагая $f(x) = l(1+x)$, непосредственно находимъ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = l(1+x), \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \\ f''(x) = -(1+x)^{-2}, \\ f'''(x) = (-1)^2\, 1\,.\,2\,(1+x)^{-3}, \\ f^{IV}(x) = (-1)^3\, 1\,.\,2\,.\,3\,(1+x)^{-4} \\ \quad\text{и т. д.} \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\, 1\,.\,2\,.\,3 \ldots \\ \quad\ldots (n-1)\,(1+x)^{-n}, \\ f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots \\ \quad\ldots n\,(1+x)^{-(n+1)}, \end{array}\right\}, \text{откуда} \left\{\begin{array}{l} f(o) = l1 = 0, \\ f'(o) = 1, \\ f''(o) = -1, \\ f'''(o) = (-1)^2\;1\,.\,2, \\ f^{IV}(o) = (-1)^3\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \\ \quad\text{и т. д.,} \\ f^{(n)}(o) = (-1)^{n-1}\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n-1), \\ f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n \frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}{(1+\theta x)^{n+1}}. \end{array}\right.$$

Поэтому рядъ Маклорена въ этомъ случаѣ напишется такъ:

$$0 + \frac{1}{1}x + (-1)\,.\,\frac{1}{1\,.\,2}x^2 + (-1)^2\,.\,\frac{1\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + (-1)^3\,.\,\frac{1\,.\,2\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n-1)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}x^n + \ldots$$

или
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Что бы найти границы значеній x'а, при коихъ этотъ рядъ будетъ сходящимся, примѣнимъ признакъ Даламбера;

такъ какъ $U_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ и $U_{n+1} = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$,

то
$$\text{Пред}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n \ldots \infty} = -\,\text{Пред.}\left(\frac{n}{n+1}x\right)_{n \ldots \infty} =$$

$$= -\,\text{Пред.}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}x\right)_{n \ldots \infty} = -x,$$

откуда заключаемъ, что если $|x| > 1$, то рядъ (4) будетъ расходящимся, а если $|x| < 1$, то — сходящимся; кромѣ того непо-

средственно видимъ, что онъ будетъ расходящимся при $x = -1$, ибо обращается тогда въ гармоническій:

$$-\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\right],$$

и сходящимся при $x = 1$, ибо обращается тогда въ такой

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots;$$

такимъ образомъ x, для сходимости ряда (4), долженъ удовлетворить условіямъ:

$$-1 < x \leqslant 1.$$

Предполагая послѣднія удовлетворенными подъ видомъ $-1 < x < 1$, разсмотримъ, наконецъ, остаточный членъ R_n; взявъ его въ формѣ, данной Коши:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{1.2.3\dots n}(1-\theta)^n x^{n+1},$$

имѣемъ:

$$R_n = (-1)^n \frac{1.2.3\dots n}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{(1-\theta)^n}{1.2.3\dots n} \cdot x^{n+1} = (-1)^n \left(\frac{(1-\theta)}{(1+\theta x)}\right)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Если $x > 0$, то ясно, что $1 + \theta x > 1 - \theta$, ибо $\theta > 0$; если же $x < 0$, то, полагая $x = -y$, при чемъ ужé $0 < y < 1$, имѣемъ:

$$1 + \theta x = 1 - \theta y \geqslant 1 - \theta, \qquad \text{ибо } \theta y \leqslant \theta;$$

значитъ, въ обоихъ случаяхъ $0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} \leqslant 1$,

а слѣд., $\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ не можетъ превысить единицы; съ другой стороны $1 + \theta x$ не можетъ обратиться въ нуль, а пред $(x^{n+1})_{n \dots \infty} = 0$, ибо x — правильная дробь; изъ всего этого мы заключаемъ, что

$$\text{Пред. } (R_n)_{n \dots \infty} = 0,$$

а потому $l(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \dots$ . . (5),

если только $\qquad -1 < x < 1.$

Для доказательства справедливости этого разложенія и при $x = 1$, положимъ

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n;$$

такъ какъ рядъ (5) при $x > 0$ — знакоперемѣнный, то $r_n = (-1)^n \theta \frac{x^{n+1}}{n+1}$, гдѣ θ — правильная положительная дробь; слѣд.,

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \theta \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

а подведеніе x къ 1 даетъ въ предѣлѣ

$$l(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{\theta_0}{n+1},$$

гдѣ θ_0 = Пред. $(\theta)_{x=1}$ и слѣд., θ_0 — тоже правильная положительная дробь; увеличивая теперь n до ∞, и получимъ

$$l(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots \dots$$

163. Вычисленіе натуральныхъ логарифмовъ. Полагая въ разложеніи (5) $x = -\frac{1}{2}$, вычислимъ $l\frac{1}{2}$, т. е. $-l2$.

Полагая затѣмъ, напр., $x = \frac{1}{8}$, найдемъ $l(1+\frac{1}{8})$, т. е. $l\frac{9}{8}$ или $l9 - l8$; а такъ какъ $l2$, а слѣд., и $l8$, уже извѣстны, то опредѣлимъ $l9$, т. е. $2l3$.

Далѣе, полагая, напр., $x = \frac{1}{24}$, найдемъ $l\frac{25}{24}$, или $2l5 - 3l2 - l3$, т. е. опредѣлимъ $l5$; и т. д.

Но разложенія, получаемыя такимъ образомъ, сходятся слишкомъ медленно, такъ что пользованіе ими утомительно; можно получить другія, сходящіяся весьма быстро, для чего, предполагая $0 < x < 1$, возьмемъ разложеніе (5):

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

и, замѣнивъ въ немъ x на $-x$, что даетъ:

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \dots,$$

вычтемъ это послѣднее разложеніе изъ предыдущаго; получимъ:

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right\}.$$

Такъ какъ дробь $\frac{1+x}{1-x} > 1$, то положимъ

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}, \text{ гдѣ уже } 0 < z < \infty;$$

тогда $z + zx = z + 1 - zx - x$ или $(2z+1)x = 1$, откуда $x = \frac{1}{2z+1}$,

а слѣд., $l\frac{z+1}{z} = 2\left\{\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2z+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2z+1)^5} + \ldots\right\}$ . . . . . (6);

это разложенiе даетъ возможность вычислить послѣдовательно логарифмы всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, ибо

$$l\frac{z+1}{z} = l(z+1) - lz,$$

при чемъ быстрота сходимости получаемыхъ рядовъ быстро растетъ вмѣстѣ съ z; кромѣ того замѣтимъ еще, что, конечно, можно ограничиться вычисленiемъ логарифмовъ лишь простыхъ чиселъ.

Примѣръ Вычислить $l2$ съ точностью до $\frac{1}{1.000.000}$

Полагая $z = 1$ въ разложенiи (6), получаемъ.

$$l2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}} + \ldots\right\};$$

если остановимся на членѣ $\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}$, то для поправки δ_n получаемъ.

$$\delta_n = 2\left\{\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{3^{2n+5}} + \ldots\right\} < 2\left\{\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+5}} + \frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+7}} + \ldots\right\} = 2\frac{1}{(2n+3)\,3^{2n+3}}\left\{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right\} = 2\frac{1}{(2n+3)\,3^{2n+3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = 2\frac{1}{(2n+3)\,3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{9-1} = \frac{1}{4.(2n+3)\,3^{2n+1}};$$

а слѣд., чтобы δ_n было меньше $\frac{1}{2000000}$ *), надо n выбрать, такъ чтобы имѣть:

---

*) Другую половину допускаемой погрѣшности надо оставить на ошибки, получаемыя отъ неточности десятичныхъ выраженiй членовъ, принятыхъ во вниманiе.

$$\frac{1}{4.(2n+3)\,3^{2n+1}} < \frac{1}{2000000} \text{ или } 4\,(2n+3)\,3^{2n+1} > 2000000$$

непосредственными попытками находимъ, что можно взять $n=5$, ибо

$$4.(2.5+3)\,3^{11} = 9211644,$$

а потому $$l2 = 2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}\right\},$$

т. е. $$l2 = 0,693147.$$

164. Можно, наконецъ, получить и еще болѣе удобное разложеніе, положивъ

$$z = u^2 - 1$$

тогда $$z + 1 = u^2$$

и, слѣд., $$l\frac{z+1}{z} = l\frac{u^2}{u^2-1} = 2\,lu - l(u-1) - l(u+1),$$

почему разложеніе (6) превратится въ такое:

$$2\,lu - l(u-1) - l(u+1) = 2\left\{\frac{1}{2u^2-1}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2u^2-1)^3}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{(2u^2-1)^5}+\dots\right\},$$

которое уже вполнѣ удобно для составленія таблицы логарифмовъ. Именно, полагая напр., послѣдовательно $u=4$, $u=5$ и $u=9$, получаемъ:

$$2\,l4 - l3 - l5 = 2\left\{\frac{1}{31}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{31^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{31^5}+\dots\right\} = \alpha,$$

$$2\,l5 - l4 - l6 = 2\left\{\frac{1}{49}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{49^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{49^5}+\dots\right\} = \beta,$$

$$2\,l9 - l8 - l10 = 2\left\{\frac{1}{161}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{161^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{161^5}+\dots\right\} = \gamma$$

или
$$\left.\begin{aligned} 4\,l2 - l3 - l5 &= \alpha \\ 2\,l5 - 3\,l2 - l3 &= \beta \\ 4\,l3 - 4\,l2 - l5 &= \gamma \end{aligned}\right\},\ \text{откуда}\ \left\{\begin{aligned} l2 &= 7\alpha + 5\beta + 3\gamma \\ l3 &= 11\alpha + 8\beta + 5\gamma \\ l5 &= 16\alpha + 12\beta + 7\gamma, \end{aligned}\right.$$

при чемъ легко видѣть, что, взявъ въ α и β всего по три члена, а въ γ — даже лишь два, мы найдемъ $l2$, $l3$ и $l5$ съ девятью десятичными знаками:

$$l2 = 0,693\,147\,148,\quad l3 = 1,098\,611\,736;\quad l5 = 1,609\,437\,836.$$

Чтобы затѣмъ вычислить $l7$, положимъ, напр., $u=49$; получимъ:

$$2\,l49 - l48 - l50 = 2\left\{\frac{1}{4801}+\dots\right\} = 0,000\,416\,579 = \delta,$$

откуда $$l7 = \frac{5l2 + l3 + 2l5 + \delta}{4}.$$

для нахожденія $l11$ положимъ $u=99$; для вычисленія $l13$ возьмемъ $u=65$ и т. д.

Когда натуральные логарифмы чиселъ извѣстны, то для перехода къ обыкновеннымъ надо ихъ, какъ мы знаемъ, помножить на абсолютный модуль послѣднихъ, т. е. на $\frac{1}{l10} = \frac{1}{l2 + l5}$.

165. Разложеніе показательной функціи e^x

Такъ какъ, полагая, $f(x) = e^x$,

имѣемъ: $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = e^x$,

то $f(o) = 1,\ f'(o) = 1,\ f''(o) = 1,\ f'''(o) = 1, \ldots\ldots,$

а потому рядъ Маклорена въ этомъ случаѣ напишется такъ:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Полагая $u_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$, а $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$,

имѣемъ: $\text{Пред.}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n..\infty} = \text{Пред.}\left(\frac{x}{n+1}\right)_{n..\infty} = 0$

при всякомъ x'ѣ, а слѣд., и полученный рядъ будетъ сходящимся при всякомъ же x'ѣ.

Беря теперь остаточный членъ подъ видомъ, даннымъ Лагранжемъ, имѣемъ.

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{1.2.3\ldots n(n+1)} x^{n+1} = e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} = e^{\theta x} u_{n+1}$$

и, слѣд., $\text{Пред.}(R_n)_{n..\infty} = 0$, ибо $e^{\theta x}$ остается всегда числомъ конечнымъ, а $\text{Пред.}(u_{n+1})_{n..\infty} = o$:

значитъ, $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

при всякомъ x'ѣ.

Въ частности, полагая $x = 1$, получаемъ:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

что было уже найдено нами инымъ путемъ.

Разложеніе функціи a^x получимъ, замѣтивъ, что

$$a^x = (a^{la})^x = a^{xla},$$

именно, на этомъ основаніи имѣемъ:

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{(xla)^n}{1.2.3..n} + \ldots$$

Примѣръ

$$e^{0,2} = 1 + \frac{0,2}{1} + \frac{(0,2)^2}{1.2} + \frac{(0,2)^3}{1.2.3} + \ldots = 1 + 0,2 + 0,02 + 0,0013 + \ldots \infty 1,2213,$$

при чемъ ошибка

$$< \frac{(0,2)^3}{1.2.3} \cdot \frac{\frac{0,2}{4}}{1 - \frac{0,2}{4}} = \frac{0,0016}{1.2.3(4 - 0,2)} = \frac{0,0016}{6 \cdot 3,8} = \frac{0,004}{57} = 0,00007.$$

166. Разложеніе Sinx. Какъ выведено выше, имѣемъ, что

$$\text{Sin}^{(k)}(x) = \text{Sin}\left(x + k.\frac{\pi}{2}\right),$$

а слѣд., полагая $\varphi(x) = \text{Sin}x$,
получимъ $\varphi(o) = o$, $\varphi'(o) = 1$; $\varphi''(o) = o$, $\varphi'''(o) = -1$, $\varphi^{IV}(o) = O$, и т. д., вслѣдствіе чего рядъ Маклорена, прерванный на членѣ

$$\frac{\varphi^{(2n)}(o)}{(2n)!} x^{2n},$$

напишется такъ.

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)} + R_{2n+1} \ldots (7),$$

при чемъ, беря выраженіе Лагранжа, имѣемъ:

$$R_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = \text{Sin}\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ldots (8).$$

Полагая теперь $u_n = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ и $u_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

получаемъ: $\quad$ Пред. $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n..\infty}$ = Пред. $\left[-\frac{x^2}{2n(2n+1)}\right]_{n..\infty} = 0$

при любомъ x, такъ что и рядъ (7) будетъ сходящимся при всякомъ же x'ѣ; а такъ какъ выраженіе (8) еще даетъ:

Пред. $(R_{2n+1})_{n..\infty}$ = Пред. $\left\{\text{Sin}\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] . u_{n+1}\right\}_{n..\infty} = 0,$

ибо всякій Sinus есть число конечное, а Пред. $(u_{n+1})_{n \ldots \infty} = 0$, то, значить, при любомъ вещественномъ x'ѣ

имѣемъ: $\mathrm{Sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \ldots \ldots \ldots$ (9).

167. Разложеніе Cosx. Выше было найдено, что

$$\mathrm{Cos}^{(n)} x = \mathrm{Cos}\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

поэтому, полагая $\varphi(x) = \mathrm{Cos}x$, получаемъ:

$$\varphi(o) = 1,\ \varphi'(o) = 0,\ \varphi''(o) = -1,\ \varphi'''(o) = 0,\ \varphi^{IV}(o) = 1,\ \text{и т. д.},$$

вслѣдствіе чего рядъ Маклорена, прекращенный на членѣ $\frac{\varphi^{(2n-1)}(o)}{(2n-1)!} x^{2n-1}$, напишется въ данномъ случаѣ такъ:

$$1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_{2n} \ldots \ldots \quad (10),$$

при чемъ $R_{2n} = \frac{\varphi^{(2n)}(\theta x)}{(2n)!} x^{2n} = \mathrm{Cos}\left(\theta x + 2n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ldots$ (11).

Полагая теперь $u_n = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ и $u_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

находимъ, что Пред. $\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n \ldots \infty} = \text{Пред.} \left[-\frac{x^2}{(2n-1)\,2n}\right]_{n \ldots \infty} = 0$

при любомъ x, откуда слѣдуетъ, что и рядъ (10) — сходящійся при всякомъ же x'ѣ. Но выраженіе (11) еще даетъ,

$$\text{Пред.} \left[R_{2n}\right]_{n \ldots \infty} = \text{Пред.} \left[\mathrm{Cos}\left(\theta x + 2n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot u_{n+1}\right]_{n \ldots \infty} = 0,$$

такъ какъ всякій Cosinus есть число конечное,

а $$\text{Пред.}\ (u_{n+1})_{n \ldots \infty} = 0$$

вслѣдствіе сходимости ряда (10). Поэтому **при всякомъ вещественномъ x имѣемъ:**

$\mathrm{Cos}\ x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots \ldots \ldots$ (12).

Прим. Найти Sin 10″ и Cos 10″.

Такъ какъ 1° = 57° 17′ 44, 81″ = 206 264, 81″,

то дуга въ $10'' = \frac{10}{206\ 264,\ 81} = \frac{1}{20\ 626,\ 481} = \alpha$.

слѣд., если возьмемъ $\operatorname{Sin} 10'' = \alpha$, а $\operatorname{Cos} 10'' = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2}$,

то въ первомъ случаѣ ошибка $\omega_1 < \frac{\alpha^3}{1.2.3}$,

а во второмъ—ошибка $\omega_2 < \frac{\alpha^4}{1.2.3.4}$.

дѣлая вычисленія, получаемъ:

$$\omega_1 < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{20\ 626,\ 481}\right)^3 < \frac{1}{6.(20\ 000)^3} = \frac{1}{6.8.10^{12}} = \frac{1}{48.10^{12}} < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10^{13}}$$

и $$\omega_2 < \frac{1}{24}\left(\frac{1}{20\ 626,\ 481}\right)^4 < \frac{1}{24.(20\ 000)^4} = \frac{1}{24.16.10^{16}} = \frac{1}{384.10^{16}} < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^{18}}$$

слѣд., $\operatorname{Sin} 10'' = \frac{1}{20\ 626,\ 481}$ съ точностью до 13 десятичныхъ знаковъ

и $\operatorname{Cos} 10'' = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{20\ 626,\ 481}\right)^2$ „ „ 18 „ „

168. Связь между показательными и тригонометрическими функціями

Мы нашли, что при **любомъ вещественномъ** x'ѣ

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1),$$

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (2)$$

и $$\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (3),$$

при чемъ эти ряды—абсолютно сходящіеся при любомъ вещественномъ x'ѣ; поэтому, если дадимъ x комплексное значеніе, модуль коего обозначимъ черезъ ρ, то рядъ

$$1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{1.2} + \frac{\rho^3}{1.2.3} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \dots,$$

составленный изъ модулей членовъ ряда (1), а, слѣд., тѣмъ болѣе ряды

изъ модулей членовъ рядовъ (2) и (3), будуть сходящимися при любомъ ρ, откуда слѣдуеть (№ 153), что сами ряды (1), (2) и (3) будуть сходящимися при всякомъ комплексномъ x.

Мы примемъ эти ряды въ качествѣ опредѣленій функцій e^x, Cosx и Sinx при комплексномъ x.

Полагая теперь въ равенствѣ 1-мъ $x = zi$,

получимъ $$e^{zi} = 1 + \frac{zi}{1} + \frac{(zi)^2}{1.2} + \frac{(zi)^3}{1.2.3} + \frac{(zi)^4}{1.2.3.4} + \ldots =$$

$$\left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right),$$

т. е. $$e^{zi} = \text{Cos}z + i\,\text{Sin}z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

а замѣна здѣсь z на $-z$ даетъ еще

$$e^{-zi} = \text{Cos}z - i\,\text{Sin}z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

откуда, складывая либо вычитая, еще выводимъ:

$$\text{Cos}z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \text{Sin}z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Эти четыре равенства, называемыя **формулами Эйлера—Бернульи**, и устанавливають связь между показательными и тригонометрическими функціями, причемъ изъ (6), полагая $z = ui$,

еще получаемъ:

$$\text{Cos}ui = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \text{Sin}ui = \frac{e^u - e^{-u}}{2}\, i \ldots\ldots\ldots (7).$$

Всѣ эти формулы справедливы при любыхъ z и u, но особенно важны при z или u—вещественныхъ

Примѣръ 1. Формулы (4) дають.

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i,\ e^{\pi i} = -1,\ e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i,\ e^{2\pi i} = 1;\ e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Примѣръ 2. На основаніи (7) получаемъ:

$$\text{Cos}\ 3i = \frac{e^3 + e^{-3}}{2} = \frac{20.08\ldots + 0,04\ldots}{2} = 10,06\ldots,$$

$$\text{Sin}\ 3i = \frac{e^3 - e^{-3}}{2}\, i = \frac{20,08\ldots - 0,04\ldots}{2}\, i = 10,02\, i.$$

Теорема. Для умноженія **любыхъ** степеней числа e надо сложить ихъ показатели.

Положимъ $$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + R'_n$$

и $$e^v = 1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{v^n}{n!} + R''_n;$$

перемножая почленно и обозначая черезъ w_k совокупность членовъ k'го измѣренія, можемъ написать, что

$$e^u . e^v = 1 + \frac{w_1}{1} + \frac{w_2}{1.2} + \frac{w_3}{1.2.3} + \ldots + \frac{w_n}{n!} + R_n;$$

но если u и v—вещественны, то извѣстно, что

$$e^u . e^v = e^{u+v},$$

т. е. $$e^u . e^v = 1 + \frac{u+v}{1} + \frac{(u+v)^2}{1.2} + \frac{(u+v)^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{(u+v)^n}{n!} + R'''_n$$

и, слѣд., $w_1 = u + v,\ w_2 = (u+v)^2, \ldots w_n = (u+v)^n,$

а такъ какъ при перемноженіи e^u и e^v выраженія для w_k получаются посредствомъ дѣйствій умноженія и сложенія, которыя совершаются одинаково съ вещественными и съ комплексными числами, то значитъ, всегда

$$e^u . e^v = 1 + \frac{u+v}{1} + \frac{(u+v)^2}{1.2} + \frac{(u+v)^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{(u+v)^n}{n!} + R'''_n,$$

а увеличеніе здѣсь n до ∞ даетъ:

$$e^u . e^v = 1 + \frac{u+v}{1} + \frac{(u+v)^2}{1.2} + \frac{(u+v)^3}{1.2.3} + \ldots$$

т. е. $$e^u . e^v = e^{u+v},$$

ибо, какъ легко убѣдиться, Пред. $\left.R'''_n\right)_{n=\infty} = 0$

Слѣдствіе 1 — обобщеніе формулы Эйлера-Бернульи. Непосредственно находимъ:

$$e^{y+zi} = e^{y} \cdot e^{zi} = e^{y}(\mathrm{Cos}z + i\,\mathrm{Sin}z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8).$$

Слѣдствіе 2 Всѣ правила дѣйствія надъ показательными функціями и всѣ тригонометрическія формулы, относящіяся къ Sinus'у и Cosinus'у, вѣрны и при комплексныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ. Между прочимъ при этомъ получаемъ:

$$\mathrm{Cos}^2 z + \mathrm{Sin}^2 z = \left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2}\right)^2 = \frac{2e^{zi}}{2}\cdot\frac{2e^{-zi}}{2} = e^{zi-zi} = e^{0} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

Прочія тригонометрическія функціи комплекснаго аргумента **опредѣляются** равенствами:

$$\mathrm{tg}x = \frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}x},\ \mathrm{Cotg}x = \frac{\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sin}x},\ \mathrm{Sec}x = \frac{1}{\mathrm{Cos}x} \text{ и } \mathrm{Cosec}x = \frac{1}{\mathrm{Sin}x},$$

изъ коихъ между прочимъ слѣдуетъ, что

$$\mathrm{tg}ui = \frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}}\,i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10).$$

Логарифмъ и круговыя функціи при комплексной величинѣ аргументовъ опредѣляются, какъ функціи, обратныя показательной и соотвѣтственнымъ тригонометрическимъ.

Примѣръ 1. Найти $l\,(a+bi)$.

Полагая $\quad a+bi = r\,(\mathrm{Cos}\varphi + i\,\mathrm{Sin}\varphi) \quad$ и $\quad l\,(a+bi) = x+yi,$

имѣемъ: $\quad r\,(\mathrm{Cos}\varphi + i\,\mathrm{Sin}\varphi) = e^{x+yi} = e^{x}\,(\mathrm{Cos}y + i\,\mathrm{Sin}y),$

откуда $\quad e^{x} = r, \quad$ т. е. $\quad x = lr, \quad$ а $\quad y = \varphi + 2k\pi.$

и, слѣд., $\quad l\left[\left[r\,(\mathrm{Cos}\varphi + i\,\mathrm{Sin}\varphi)\right]\right] = lr + (\varphi + 2k\pi)\,i,$

гдѣ k — любое цѣлое число.

Въ частности, полагая $b = o$ и $a > 0$, т. е. $a = r, \varphi = o$,

получаемъ: $$l\,((r)) = lr + 2\,k\pi i;$$

а полагая $b = o$ и $a < o$, т. е. $a = -r$ и $\varphi = \pi$,

получаемъ $$l\,((r)) = lr + (2\,k + 1)\,\pi\,i.$$

Примѣръ 2. Найти Arctg i

Полагая его равнымъ $x + yi$, имѣемъ:

$i = tg\,(x + yi) = \frac{tgx + tgyi}{1 - tgx\,.\,tgyi}$ или $i - i\,tgx\,.\,tgyi = tgx + tgyi$,

т. е., на основаніи (10):

$$i - i\,tgx.\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}\,i = tgx + \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}\,i,$$

откуда $\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} = 1$ и $\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}\,tgx = tgx$,

а слѣд., $y = \pm\infty$, x = произвольн. числу

и потому $$\text{Arctg}\,i = x \pm i\,.\,\infty$$

ГЛАВА IX.

Maximum и Minimum функціи.

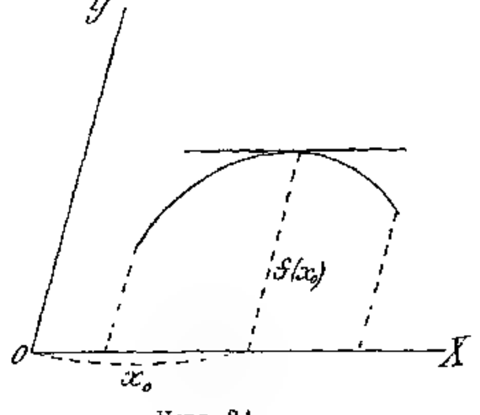
169. Опредѣленіе. Значеніе $f(x_0)$ непрерывной функціи $f(x)$ наз. **maximum'омъ**, если оно больше **всѣхъ** ея значеній для **смежныхъ**, т. е. достаточно близкихъ къ x_0, величинъ аргумента,

т. е. если $\quad f(x_0+h)-f(x_0)<0$

при всякомъ, **достаточно маломъ**, h — **какъ положительномъ, такъ и отрицательномъ.**

Точно также $f(x_0)$ наз. **minimum'омъ**, если оно меньше **всѣхъ смежныхъ** значеній этой функціи,

т. е. если $\quad f(x_0+h)-f(x_0)>0$



Черт 24.

при всякомъ, **достаточно маломъ**, h — **какъ положительномъ, такъ и отрицательномъ.**

170. Теорема 1. Если на участкѣ (a, b) производная функціи положительна, то сама функція растетъ при увеличеніи аргумента и, слѣд., убываетъ при его уменьшеніи; а если эта производная отрицательна, то сама функція при **увеличеніи** аргумента **убываетъ.** Теорема эта была доказана, въ качествѣ леммы, въ № 136.

Очевидно, что обратно — если функція растетъ при увеличеніи аргумента, то ея производная положительна, а если она убываетъ, то ея производная отрицательна.

171. Теорема 2. Чтобы $f(x_0)$ было **maximum**, необходимо и достаточно превращеніе производной этой функціи

изъ **положительной въ отрицательную** при переходѣ x черезъ x_0; а что бы $f(x_0)$ было **minimum**, необходимо и достаточно превращеніе этой производной **изъ отрицательной въ положительную** при переходѣ x черезъ x_0.

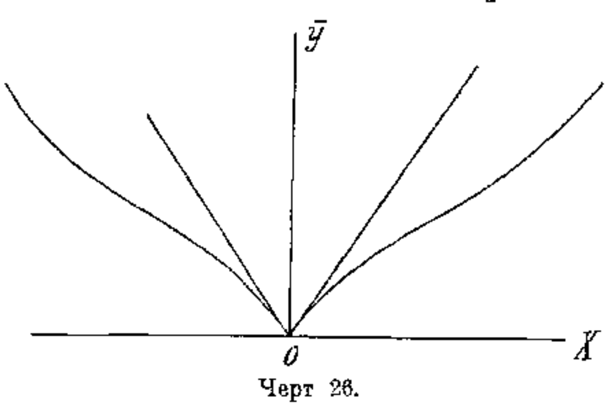
Дѣйствительно, если, напр., $f(x)$ есть maximum, то при увеличеніи x до величины x_0, растетъ и $f(x)$, а слѣд., здѣсь $f'(x) > 0$; при дальнѣйшемъ же увеличеніи x'а функція убываетъ, а слѣд., здѣсь уже $f'(x) < 0$; обратно, если $f'(x)$ до $x = x_0$ положительна, а далѣе отрицательна, то до $x = x_0$ функція растетъ, а далѣе убываетъ, такъ что $f(x)_0$ есть maximum.

Слѣдствіе 1. Значенія аргумента, при которыхъ $f(x)$ получаетъ Max., найдемъ изъ условія, что $f'(x)$ при нихъ превращается изъ положительной въ отрицательную; а значенія, при которыхъ $f(x)$ получаетъ minimum, найдемъ изъ условія, что $f'(x)$ при нихъ превращается изъ отрицательной въ положительную.

Слѣдствіе 2. Такъ какъ функція можетъ перемѣнить знакъ, либо разрываясь, либо — если она непрерывна — проходя (по теоремѣ Коши, № 101) непремѣнно черезъ нуль, то получаемъ слѣдующее **правило:** для нахожденія maximum'овъ и minimum'овъ функціи $f(x)$ ищемъ тѣ значенія x_0 аргумента, при которыхъ производная $f'(x)$ этой функціи либо **разрывается, либо обращается въ нуль,** а затѣмъ опредѣляемъ знаки выраженій $f'(x_0 - h)$ и $f'(x_0 + h)$; и если оба знака окажутся одинаковы, то $f(x_0)$ **не** maximum и **не** minimum; а если эти знаки будутъ различны, то $f(x_0)$ есть maximum, когда $+$ превращается въ $-$, и $f(x_0)$ есть minimum въ случаѣ превращенія $-$ въ $+$.

Для нахожденія самой величины Maximum'a или **Minimum'a** функціи надо, очевидно, подставить найденное значеніе x_0 аргумента въ ея выраженіе, т. е. вычислить $f(x_0)$.

Прим. 1. Функція $x\,\mathrm{Arccotg}\,x + \frac{1}{2}\,l\,(x^2+1)$, очевидно, непрерывна, ибо, хотя $\mathrm{Arccotg}\,x$ разрывается при $x = o$, но этотъ разрывъ уничтожается вліяніемъ множителя x, обращающегося при этомъ въ нуль. Обозначая эту функцію черезъ $f(x)$, имѣемъ, что



Черт. 26.

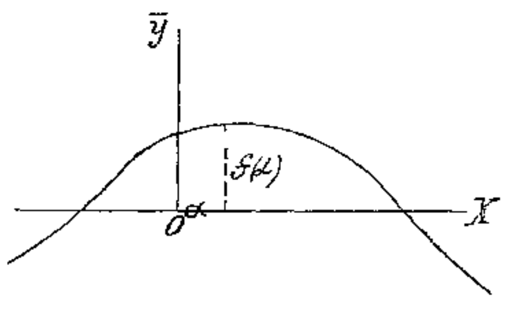
$$f'(x) = \mathrm{Arccotg}\,x - x\,\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1},$$

т. е. $f'(x) = \mathrm{Arccotg}\,x$;

и такъ какъ ур-ніе Arccotgx = 0 не имѣетъ конечныхъ рѣшеній, разрывается же Arccotgx лишь при $x = 0$, перескакивая при этомъ съ $-\frac{\pi}{2}$ на $+\frac{\pi}{2}$, то, значитъ, $f(x)$ имѣетъ лишь Minimum, и именно при $x = 0$, при чемъ онъ равенъ 0.

Прим. 2. Пусть $f(x) = \text{Cos}x + k\,\text{Sin}x$

и, слѣд., $f'(x) = -\text{Sin}x + k\,\text{Cos}x$,



Черт. 26.

обѣ эти функціи опредѣлены и непрерывны при любомъ вещественномъ x'ѣ, а потому значенія аргумента, при которыхъ $f(x)$ можетъ имѣть Max или Min., найдутся изъ ур-нія $f'(x) = 0$ или $-\text{Sin}x + k\,\text{Cos}x = 0$, которое даетъ $\text{tg}x_0 = k$

и, слѣд., $x_0 = \alpha + m\pi$,

гдѣ m — любое цѣлое число, а $\alpha = \text{Arctg}k$.

Полагая теперь $h > 0$, имѣемъ, что

$$f'(x_0 - h) = -\text{Sin}(\alpha + m\pi - h) + k\,\text{Cos}(\alpha + m\pi - h) =$$

$$= (-1)^m[-\text{Sin}(\alpha - h) + k\,\text{Cos}(\alpha - h)] =$$

$$= (-1)^m[-\text{Sin}\alpha\,\text{Cos}h + \text{Cos}\alpha\,\text{Sin}h + k\,\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}h + k\,\text{Sin}\alpha\,\text{Sin}h] =$$

$$= (-1)^m[(-\text{Sin}\alpha + k\,\text{Cos}\alpha)\,\text{Cos}h + (\text{Cos}\alpha + k\,\text{Sin}\alpha)\,\text{Sin}h] = (-1)^m(\text{Cos}\alpha + k\,\text{Sin}\alpha)\,\text{Sin}h,$$

а

$$f'(x + h) = -(-1)^m(\text{Cos}\alpha + k\,\text{Sin}\alpha)\,\text{Sin}h;$$

поэтому $f'(x)$ при m — четномъ переходитъ отъ + къ —, а при m — нечетномъ отъ — къ +; а слѣд., $f(\alpha + m\pi)$ суть maximum'ы при m четномъ и minimum'ы при m — нечетномъ.

172. Аналитическій способъ нахожденія Maximum'овъ и Minimum'овъ функціи (примѣненіе ряда Тейлора). Положимъ, что функція $f(x)$ и всѣ ея производныя, какія только намъ понадобятся, конечны и непрерывны. Тогда по формулѣ Тейлора имѣемъ:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0).h + \frac{f''(x_0)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{1.2.3}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n;$$

при h — безк.-маломъ знакъ всей суммы во второй части одинаковъ со знакомъ ея перваго члена, а слѣд., если только $f'(x_0) \neq 0$, то онъ мѣняется при замѣнѣ h на $-h$; отсюда заключаемъ, что для того, чтобы $f(x_0)$ **могло быть** Max. либо Min., число x_0 должно удовлетворять условію $f'(x_0) = 0$.

Предположимъ теперь, что это послѣднее выполнено, и допустимъ, для общности, что x_0 обращаетъ въ нуль и всѣ послѣду-

ющія производныя до $(n-1)$'ой включительно, такъ что

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

но уже $$f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

тогда $$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+R_n,$$

и при h—безк. маломъ знакъ суммы во второй части опять одинаковъ со знакомъ ея перваго члена; поэтому, если n—нечетное, то $f(x_0+h)-f(x_0)$ мѣняетъ знакъ при замѣнѣ h на $-h$ и, слѣд., $f(x_0)$ не есть ни Max, ни Min, если же n четное, то знакъ $f(x_0+h)-f(x_0)$ остается одинаковъ со знакомъ $f^{(n)}(x_0)$ при $h>0$ и при $h<0$, а слѣд., если $f^{(n)}(x_0)>0$, то $f(x_0)$ есть Minimum, а если $f^{(n)}(x_0)<0$, то $f(x_0)$ есть Maximum.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее **правило**: если функція $f(x)$ и ея производныя непрерывны, то для нахожденія maximum'овъ и minimum'овъ функціи, ищемъ корни x_0 ур—нія $f'(x)=0$ и затѣмъ подставляемъ каждый изъ нихъ во всѣ послѣдующія производныя: если первая изъ нихъ, которая при этомъ не обращается въ нуль, будетъ **нечетнаго** порядка, то $f'(x_0)$ **не** есть **ни** Max., **ни** Min., если же она—**четнаго** порядка и **отрицательна**, то $f(x_0)$ есть Maximum, а если она — **четнаго** порядка и **положительна**, то $f(x_0)$ есть Minimum.

Прим. Найти Max. или Min. функціи

$$f(x)=e^x+2\operatorname{Cos}x+e^{-x}.$$

Такъ какъ $$f'(x)=e^x-2\operatorname{Sin}x-e^{-x},$$

то ур—ніе $$f'(x)=0 \quad \text{даетъ } x_0=0;$$

затѣмъ $$f''(x)=e^x-2\operatorname{Cos}x+e^{-x} \quad \text{и, слѣд., } \quad f''(o)=0,$$

$$f'''(x)=e^x+2\operatorname{Sin}x-e^{-x} \quad \text{и, слѣд., } \quad f'''(o)=0,$$

и $$f^{\text{IV}}(x)=e^x+2\operatorname{Cos}x+e^{-x} \quad \text{и, слѣд., } \quad f^{\text{IV}}(o)=4,$$

а потому $f(o)$ есть Min., при чемъ онъ равенъ, очевидно, 4.

Для полноты рѣшенія задачи докажемъ еще, что ур—ніе $f'(x)=0$ другихъ корней, кромѣ $x_0=0$, не имѣетъ; съ этой цѣлью замѣтимъ,

что $f'(x) = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\right) +$

$$-\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right) +$$

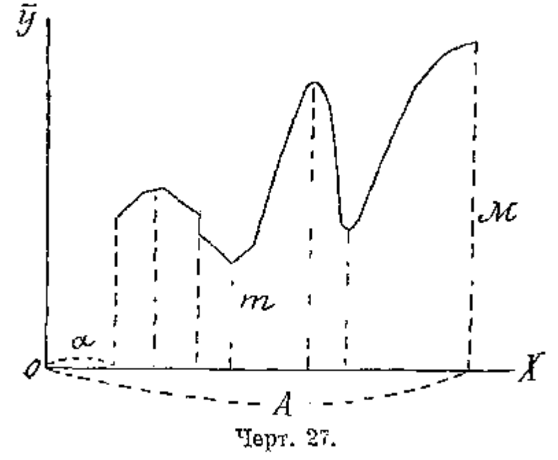
$$-2\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\right) = 4\left(\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \cdots\right) =$$

$$= 4 \cdot x^3\left(\frac{1}{3!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^8}{11!} + \cdots\right);$$

такъ какъ всѣ члены въ скобкахъ завѣдомо положительны, то ихъ сумма нулемъ быть не можетъ, а слѣд., все произведенiе обращается въ нуль лишь насчетъ перваго множителя, т. е. только при

$$x = 0.$$

173. Наибольшее и наименьшее значенiе функцiи въ данномъ промежуткѣ. Подъ такимъ названiемъ разумѣютъ наибольшее (M) или наименьшее (m) изъ всѣхъ значенiй, которыя функцiя прiобрѣтаетъ при измѣненiи x'а на данномъ участкѣ (a, A).



Черт. 27.

Очевидно, что для нахожденiя M и m надо опредѣлить всѣ Maximum'ы и всѣ Minimum'ы функцiи и ея значенiя въ точкахъ разрыва, а также на краяхъ участка; тогда M равно наибольшему изъ всѣхъ этихъ чиселъ, а m наименьшему изъ нихъ.

Напр., для функцiи Arccotgx, очевидно,

$$M = \frac{\pi}{2}, \quad \text{а} \quad m = -\frac{\pi}{2}$$

ГЛАВА X.

Неопредѣленныя выраженія.

174. Опредѣленіе. Истиннымъ значеніемъ функціи $f(x)$ при $x=a$, принимающей, **при непосредственной подстановкѣ** этой величины x'а, какой либо неопредѣленный видъ, наз. **предѣлъ величины этой функціи при подведеніи x къ** a; это истинное значеніе мы будемъ обозначать такъ: $[f(x)]_{x=a}$, а значеніе a аргумента наз. критическимъ.

Подобное опредѣленіе имѣетъ, какъ мы знаемъ, цѣлью сохраненіе, по возможности, непрерывности функціи и при $x=a$.

Разсмотримъ семь простѣйшихъ случаевъ неопредѣленности, именно:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0.\infty;\quad \infty-\infty;\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty.$$

175. I случай—неопредѣленность вида $\frac{0}{0}$.

Теорема—правило Лопиталя (L'Hôspitale).

Истинное значеніе отношенія двухъ функцій, принимающаго при $x=a$ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, равно **отношенію производныхъ** этихъ функцій при $x=a$. Дѣйствительно предположимъ сначала, что a число конечное и что $\varphi'(a) \neq 0$, а $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$, такъ что $\frac{f(a)}{\varphi(a)}=\frac{0}{0}$.

$$\text{Тогда } \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a} = \text{Пред.}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a} = \text{Пред.}\left[\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}\right]_{x=a}$$

$$=\text{Пред.}\left[\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}\right]_{x=a} = \frac{\text{Пред.}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]_{x=a}}{\text{Пред.}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\right]_{x=a}} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Если $\varphi'(a) = 0$, но $f'(a) \neq 0$, такъ что $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \infty$,

то $$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x \ldots a} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что и $$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x \ldots a} = \infty,$$

такъ что $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}$ и $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ обращаются въ ∞ одновременно

(нельзя, однако, въ этомъ случаѣ приравнивать другъ другу эти два выраженія, такъ какъ безконечности эти могутъ быть разныхъ порядковъ).

Наконецъ, если, $f'(a) = 0$ и $\varphi'(a) = 0$, такъ что само отношеніе производныхъ принимаетъ тотъ же неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, то надо къ нему въ свою очередь примѣнить тоже самое правило, ибо по формулѣ Тейлора, полагая $x - a = h$, имѣемъ:

$$\text{Пред.}\left[\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)}\right]_{x \ldots a} = \text{Пред.}\left[\frac{f(a+h) - f(a)}{\varphi(a+h) - \varphi(a)}\right]_{h \ldots o} =$$

$$= \text{Пред.}\left|\frac{f'(a)\,h + \frac{f''(a+\theta_1 h)}{1.2}\,h^2}{\varphi'(a)\,h + \frac{\varphi''(a+\theta_2 h)}{1.2}\,h^2}\right|_{h \ldots o} = \text{Пред.}\left\{\frac{\frac{f''(a+\theta_1 h)}{1.2}\,h^2}{\frac{\varphi''(a+\theta_2 h)}{1.2}\,h^3}\right\}_{h \ldots o} =$$

$$\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}.$$

Точно также, если $f''(a) = 0$ и $\varphi''(a) = 0$, то примѣняемъ правило Лопиталя къ отношенію $\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$; и т. д.

Теперь предположимъ, что $a = \infty$, т. е. ищется $\frac{f(\infty)}{\varphi(\infty)}$, при чемъ

$$f(\infty) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\infty) = 0;$$

въ такомъ случаѣ, полагая $x = \frac{1}{z}$, имѣемъ,

что $$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x = \infty} = \left[\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}\right]_{z = o};$$

къ послѣднему отношенію ужѐ можемъ, на основаніи предъидущаго №, примѣнить правило Лопиталя, при чемъ получимъ:

$$\left[\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}\right]_{z=0} = \left[\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}\right]_{z=0} = \left[\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}\right]_{z=0},$$

т. е.

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=\infty}.$$

Замѣчаніе. Очевидно, что при вычисленіи истинныхъ значеній любаго вида можно множители, имѣющіе предѣлы, **не равные нулю**, выносить за скобки.

Прим. $\left\{\frac{\operatorname{Sin} x - x}{\operatorname{Arctg} x - x}\right\}_{x=0} = \frac{0}{0} = \left\{\frac{\operatorname{Cos} x - 1}{\frac{1}{x^2+1} - 1}\right\}_{x=0} = \left\{\frac{(x^2+1)(\operatorname{Cos} x - 1)}{1 - (x^2+1)}\right\}_{x=0} =$

$= (x^2+1)_{x=0}\left\{\frac{1 - \operatorname{Cos} x}{x^2}\right\}_{x=0} = 1\cdot\frac{0}{0} = \left\{\frac{\operatorname{Sin} x}{2x}\right\}_{x=0} = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{Cos} x}{1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{2}.$

176. II случай—неопредѣленность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема. Истинное значеніе отношенія двухъ функцій, обращающагося при $x = a$ въ неопредѣленность вида $\frac{\infty}{\infty}$, опредѣляется по правилу Лопиталя. Дѣйствительно, пусть $f(a) = \infty$ и $\varphi(a) = \infty$.

1) Предположимъ сначала, что

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a} = A \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix};$$

такъ какъ $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$, при чемъ $\frac{1}{\varphi(a)} = 0$ и $\frac{1}{f(a)} = 0$,

то, примѣняя поэтому ко второй дроби правило Лопиталя, получаемъ:

$$A = \left\{\frac{\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]'_x}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]'_x}\right\}_{x=a} = \left\{\frac{-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}\right\}_{x=a} =$$

$$= \left\{\frac{\varphi'(x)\cdot[f(x)]^2}{f'(x)\cdot[\varphi(x)]^2}\right\}_{x=a} = \left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a}\cdot\left\{\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}\right\}^2$$

т. е.

$$A = \left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a}\cdot A^2;$$

и такъ какъ $A \gtrless \begin{smallmatrix} 0 \\ \infty \end{smallmatrix}$, то, сокращая на A, имѣемъ:

$$1 = \left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a} \cdot A, \text{ откуда } A = \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$$

2) Пусть теперь $A = 0$. Возьмемъ въ такомъ случаѣ какое либо конечное и не равное нулю число B такого знака, что-бы $f(x)$ и $B\varphi(x)$ были одного знака, такъ что и

$$f(a) + B.\varphi(a) = \infty,$$

а, слѣд.,

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} + B = \frac{f(a) + B\varphi(a)}{\varphi(a)} = \frac{\infty}{\infty};$$

тогда, такъ какъ, очевидно,

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} + B\right]_{x=a} = A + B = B \gtrless \begin{smallmatrix} 0 \\ \infty \end{smallmatrix},$$

то можемъ, согласно предшествующему доказательству, примѣнить правило Лопиталя, что дастъ:

$$B = \left[\frac{f(x) + B\varphi(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{f'(x) + B.\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} + B\right]_{x=a} =$$

$$= \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} + B,$$

откуда слѣдуетъ, что $\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} = 0,$

а, значитъ, опять

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$$

3) Пусть, наконецъ, $A = \infty$; тогда $\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a} = 0,$

и, слѣд., по предъидущему, и $\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a} = 0$, т. е. $\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} = \infty$, такъ что $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x = a$ обратятся въ ∞ одновременно; значитъ, правило Лопиталя и въ этомъ случаѣ дастъ правильное указаніе о величинѣ $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}$. (Нельзя только обѣ безконечности $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}$ и $\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$ считать непремѣнно

равными другъ другу, ибо онѣ могутъ быть разныхъ порядковъ).

$$\text{Прим.}\ \left\{\frac{tg\frac{x}{2}}{\operatorname{Cosec}x}\right\}_{x=\pi}=\frac{\infty}{\infty}=\left\{\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}}}{-\operatorname{Cosec}x.\operatorname{Cotg}x}\right\}_{x=\pi}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{Sin}^2x}{\operatorname{Cos}x\ \operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}}\right\}_{x=\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{Cos}x}\right)_{x=\pi}\cdot\left\{\left[\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}\right]_{x=\pi}\right\}^2=\frac{0}{0}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\left[\frac{\operatorname{Cos}x}{-\frac{1}{2}\operatorname{Sin}\frac{x}{2}}\right]_{x=\pi}\right\}^2=2.$$

177. III. Случай—неопредѣленность вида $o.\infty$.

Правило. Неопредѣленность вида $o.\infty$ сводится на одинъ изъ двухъ предъидущихъ случаевъ, т. е. къ виду $\frac{0}{0}$ либо $\frac{\infty}{\infty}$, если одинъ изъ множителей представимъ въ видѣ **единицы, дѣленной на обращенную величину.** Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$f(a)=0 \quad \text{и} \quad \varphi(a)=\infty,$$

такъ что
$$f(a).\ \varphi(a)=0.\infty;$$

тогда, положивъ
$$\theta(x)=\frac{1}{f(x)},$$

имѣемъ
$$\theta(a)=\infty \quad \text{и} \quad f(x)=\frac{1}{\theta(x)},$$

а потому
$$\Big[f(x).\ \varphi(x)\Big]_{x=a}=\left[\frac{\varphi(x)}{\theta(x)}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty};$$

положивъ-же
$$\omega(x)=\frac{1}{\varphi(x)},$$

имѣемъ
$$\omega(a)=0 \quad \text{и} \quad \varphi(x)=\frac{1}{\omega(x)},$$

такъ что
$$\Big[f(x).\ \varphi(x)\Big]_{x=a}=\left[\frac{f(x)}{\omega(x)}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}$$

$$\text{Прим. 1.}\quad \left[\operatorname{Sin}2x.\ l\left(1+e^{\operatorname{Cotg}x}\right)\right]_{x=o}=0.\infty=\left[\frac{l\left(1+e^{\operatorname{Cotg}x}\right)}{\operatorname{Cosec}2x}\right]_{x=o}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\left[\frac{\left[l\left(1+e^{\operatorname{Cotg}x}\right)\right]'_x}{\operatorname{Cosec}'_x 2x}\right]_{x=o}=\left[\frac{\frac{e^{\operatorname{Cotg}x}}{\left(1+e^{\operatorname{Cotg}x}\right)\operatorname{Sin}^2x}}{-2\operatorname{Cosec}2x.\ \operatorname{Cotg}2x}\right]_{x=o}=$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{e^{\mathrm{Cotg}x}}{1+e^{\mathrm{Cotg}x}}\cdot\frac{\mathrm{Sin}^2 2x}{\mathrm{Sin}^2 x.\ \mathrm{Cos}\,2x}\right\}_{x=o} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\mathrm{Cotg}x}}{1+e^{\mathrm{Cotg}x}}\right]_{x=o}\cdot\left[\frac{\mathrm{Sin}\,2x}{\mathrm{Sin}\,x}\right]^2_{x=0}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{Cos}\,2x}\right)_{x=o}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{\mathrm{Cotg}x}\right)'_x}{\left(1+e^{\mathrm{Cotg}x}\right)'_x}\right]_{x=o}\cdot\left[\frac{2\,\mathrm{Cos}\,2x}{\mathrm{Cos}x}\right]^2_{x=o} = 2.$$

Прим. 2. $\left[l(1+\mathrm{Sin}^2 3x).\ \mathrm{Cotg}^2 2x\right]_{x=\pi} = 0\cdot\infty = \left[\frac{l(1+\mathrm{Sin}^2 3x)}{\mathrm{tg}^2 2x}\right]_{x=\pi} =$

$$= \left[\frac{l'_x(1+\mathrm{Sin}^2 3x)}{(\mathrm{tg}^2 2x)'_x}\right]_{x=\pi} = \left[\frac{\frac{6\,\mathrm{Sin}\,3x\ \mathrm{Cos}\,3x}{1+\mathrm{Sin}^2 3x}}{\frac{4\,\mathrm{tg}\,2x}{\mathrm{Cos}^2 2x}}\right]_{x=\pi} = \frac{3}{2}\left[\frac{\mathrm{Sin}\,3x\ \mathrm{Cos}\,3x\ \mathrm{Cos}^3 2x}{(1+\mathrm{Sin}^2 3x)\ \mathrm{Sin}\,2x}\right]_{x=\pi} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{\mathrm{Cos}\,3x.\ \mathrm{Cos}^3 2x}{1+\mathrm{Sin}^2 3x}\right]_{x=\pi}\cdot\left[\frac{\mathrm{Sin}\,3x}{\mathrm{Sin}\,2x}\right]_{x=\pi} = \frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{1}\cdot\left[\frac{3\ \mathrm{Cos}\,3x}{2\ \mathrm{Cos}\,2x}\right]_{x=\pi} = \frac{9}{4}.$$

178. IV случай — неопредѣленность вида $\infty - \infty$.

Правило: Если разность двухъ функцій при $x=a$ обращается въ неопредѣленность вида $\infty - \infty$, то для приведенія ее къ виду $\frac{0}{0}$ надо каждый ея членъ представить въ видѣ единицы, дѣленной на обращенную величину, и затѣмъ соединить обѣ дроби въ одну (произвести вычитаніе). Дѣйствительно, пусть $f(a)=\infty$ и $\varphi(a)=\infty$,

такъ что $\qquad f(a)-\varphi(a)=\infty-\infty;$

полагая $\qquad \frac{1}{f(x)}=F(x)$ и $\frac{1}{\varphi(x)}=\Phi(x),$

при чемъ, очевидно, $F(a)=0$ и $\Phi(a)=0,$

имѣемъ: $\qquad f(x)=\frac{1}{F(x)}$ и $\varphi(x)=\frac{1}{\Phi(x)},$

а слѣд., $\qquad f(x)-\varphi(x)=\frac{1}{F(x)}-\frac{1}{\Phi(x)}=\frac{\Phi(x)-F(x)}{F(x).\ \Phi(x)}$

и, значитъ, $\qquad \left[f(x)-\varphi(x)\right]_{x=a}=\left[\frac{\Phi(x)-F(x)}{F(x)\ \Phi(x)}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}.$

Опредѣленіе. Два безгранично-растущихъ числа (двѣ „безконечности") наз. **эквивалентными**, если предѣлъ ихъ отношенія равенъ единицѣ.

Теорема. Если безконечность $f(a)$ и $\varphi(a)$ не эквивалентны, то
$$\Big[f(x)-\varphi(x)\Big]_{x=a}=\pm\infty.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ
$$f(x)-\varphi(x)=f(x)\left[1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right],$$
то, полагая
$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a}=A,$$
имѣемъ:
$$\Big[f(x)-\varphi(x)\Big]_{x=a}=f(a).(1-A);$$
слѣд., если только $f(a)$ и $\varphi(a)$ не эквивалентны другъ другу,

т. е.
$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a}\gtrless 1 \text{ и, слѣд., } 1-A\gtrless 0,$$
то
$$\Big[f(x)-\varphi(x)\Big]_{x=a}=\pm\infty.$$

При этомъ, очевидно, знакъ передъ ∞ одинаковъ со знакомъ того изъ членовъ разности, который растетъ быстрѣе.

Примѣръ.
$$\left(\frac{\operatorname{Cotg}x-2\operatorname{Cosec}2x}{x}\right)_{x=o}=\frac{\infty-\infty}{o}=\left[\frac{1}{x\,tgx}-\frac{2}{x\operatorname{Sin}2x}\right]_{x=o}=$$
$$=\left[\frac{\operatorname{Sin}2x-2\,tgx}{x\,tgx\operatorname{Sin}2x}\right]_{x=o}=\left[\frac{2\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x-2\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}}{x\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}.2\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x}\right]_{x=o}=$$
$$=\left[\frac{2\operatorname{Sin}x(\operatorname{Cos}^2x-1)}{2x\operatorname{Sin}^2x}\right]_{x=o}=\left[\frac{-\operatorname{Sin}x\operatorname{Sin}^2x}{x\operatorname{Sin}^2x}\right]_{x=o}=-\left[\frac{\operatorname{Sin}x}{x}\right]_{x=o}=-1.$$

179. V, VI и VII случаи неопредѣленности показательнаго вида 0^0, ∞^0 и 1^∞.

Правило. Отысканіе истиннаго значенія неопредѣленностей вида o^0, ∞^0 и 1^∞ приводится къ отысканію истиннаго значенія неопредѣленностей вида $0.\infty$, если

вмѣсто самой данной функціи будемъ разсматривать **ея логарифмъ**. Дѣйствительно, пусть $F(x) = f(x)^{\varphi(x)}$;

тогда $$lF(x) = \varphi(x) \,.\, lf(x),$$

а слѣд., когда $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$, то $lF(a) = 0 \,.\, (-\infty)$;

когда $f(a) = \infty$, а $\varphi(a) = 0$, то $lF(a) = 0 \,.\, \infty$,

а когда $f(a) = 1$, а $\varphi(a) = \infty$, то $lF(a) = \infty \,.\, 0$,

ибо $$l0 = -\infty, \quad l\infty = +\infty \quad \text{и} \quad l1 = 0.$$

Прим. 1. Пусть $$\left(\operatorname{Sin}x^{\,\operatorname{tg}2x}\right)_{x=\pi} = 0^0 = A;$$

тогда $$lA = \left(\operatorname{tg}2x \; l\operatorname{Sin}x\right)_{x=\pi} = \left[\frac{l\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cotg}2x}\right]_{x=\pi} = \left[\frac{\frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}}{-\frac{2}{\operatorname{Sin}^2 2x}}\right]_{x=\pi} =$$

$$= -\left(\frac{\operatorname{Cos}x}{2}\right)_{x=\pi} \cdot \left[\frac{\operatorname{Sin}^2 2x}{\operatorname{Sin}x}\right]_{x=\pi} = \frac{1}{2}\left(2\operatorname{Cos}x \,.\, \operatorname{Sin}2x\right)_{x=\pi} = 0$$

и, слѣд., $$A = e^0 = 1$$

Прим. 2. Пусть $$\left[(\operatorname{tg}x)^{\,l\operatorname{Sin}x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \infty^0 = A;$$

тогда $$lA = \left[l\operatorname{Sin}x \,.\, l\operatorname{tg}x\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \,.\, \infty = \left[\frac{l\operatorname{tg}x}{\left(\frac{1}{l\operatorname{Sin}x}\right)}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{l\operatorname{Sin}x - l\operatorname{Cos}x}{\frac{1}{l\operatorname{Sin}x}}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \left[(l\operatorname{Sin}x)^2 - \frac{l\operatorname{Cos}x}{\left(\frac{1}{l\operatorname{Sin}x}\right)}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = -\left[\frac{l\operatorname{Cos}x}{\left(\frac{1}{l\operatorname{Sin}x}\right)}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = -\left[\frac{\left(l\operatorname{Cos}x\right)'_x}{\left(\frac{1}{l\operatorname{Sin}x}\right)'_x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\left[\frac{-\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}}{-\frac{\operatorname{Cos}x}{(l\operatorname{Sin}x)^2 \,.\, \operatorname{Sin}x}}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = -\left[\frac{\operatorname{Sin}x \cdot l\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}\right]^2_{x=\frac{\pi}{2}} = -\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{l\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}\right]^2_{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\left[\frac{\left(l\operatorname{Sin}x\right)'_x}{\operatorname{Cos}'_x x}\right]^2_{x=\frac{\pi}{2}} = -\left[\frac{\frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}}{\operatorname{Sin}x}\right]^2_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$$

и, слѣд.,
$$A = e^0 = 1.$$

Прим. 3. Пусть
$$\left[\left(1+\operatorname{Sin}2x\right)^{\operatorname{Cotg}x}\right]_{x=o} = 1^{\infty} = A,$$

тогда
$$lA = \left[\operatorname{Cotg}x \cdot l\left(1+\operatorname{Sin}2x\right)\right]_{x=o} = \left[\frac{l(1+\operatorname{Sin}2x)}{\operatorname{tg}x}\right]_{x=o} = \left|\frac{\dfrac{2\operatorname{Cos}2x}{1+\operatorname{Sin}2x}}{\dfrac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}}\right|_{x=o} =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{Cos}^2 x \operatorname{Cos}2x}{1+\operatorname{Sin}2x}\right)_{x=o} = 2 \quad \text{и, слѣд.,} \quad A = e^2.$$

180. Вышеизложенные способы нахожденія истинныхъ значеній неопредѣленностей не всегда приводятъ къ цѣли—иногда приходится прибѣгать къ какимъ либо частнымъ, спеціальнымъ пріемамъ, а иной разъ выгодно примѣнить разложенія функцій въ ряды Маклорена или Тейлора.

Прим. 1.
$$\left[\frac{x+\operatorname{Sin}x}{x+\operatorname{Cos}x}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{1+\dfrac{\operatorname{Sin}x}{x}}{1+\dfrac{\operatorname{Cos}x}{x}}\right]_{x=\infty} = 1,$$

между тѣмъ какъ правило Лопиталя не привело бы ни къ какому результату, ибо дало бы дробь $\frac{1+\operatorname{Cos}x}{1+\operatorname{Sin}x}$, которая при $x=\infty$ можетъ принять любое изъ значеній отъ o до ∞.

Прим. 2. Пусть
$$A = \left[\frac{xl(1+x^2)-\operatorname{Sin}^3 x}{x^7}\right]_{x=o} = \frac{o}{o},$$

такъ какъ
$$l\,(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \quad \text{и} \quad \operatorname{Sin}x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots,$$

то
$$l\,(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \alpha_8$$

и
$$\operatorname{Sin}^3 x = x^3 + 3x^2\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots\right) + 3x\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots\right)^2 + \left(-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)^3 =$$

$$= x^3 + \left(-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{40}-\ldots\right) + \left(\frac{x^7}{12}-\ldots\right) + \ldots = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} - \alpha_9,$$

а слѣд.,

$$A = \left\{ \frac{\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \alpha_9'\right) - \left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} - \alpha_9\right)}{x^7} \right\}_{x=o} =$$

$$= \left[\frac{\frac{27}{120}x^7 - \alpha_9' + \alpha_9}{x^7}\right]_{x=o} = \left(\frac{9}{40} - \alpha_2' + \alpha_2\right)_{x=o} = \frac{9}{40};$$

если же пользоваться правиломъ Лопиталя, то пришлось бы числитель и знаменатель дифференцировать по семи разъ.

181. Замѣчаніе. Кромѣ разсмотрѣнныхъ выше видовъ неопредѣленностей есть еще много иныхъ, такъ наз. **нераскрываемыхъ** напр.,

$$\operatorname{Sin}\frac{1}{x} \text{ и } \operatorname{Cos}\frac{1}{x} \text{ при } x = 0.$$

ГЛАВА XI.

Понятіе объ интегралѣ; основные пріемы интегрированія.

182. Опредѣленіе 1. Первообразной относительно данной функціи $f(x)$ наз. такая **новая** функція $F(x)$, производная которой равна данной.

Очевидно, что число первообразныхъ у всякой функціи — безконечно, ибо если $F'(x) = f(x)$, то, обозначая черезъ C любое постоянное число, имѣемъ, что и $(F(x) + C)'_x = f(x)$.

Обратно, двѣ первообразныхъ одной и той же данной функціи $f(x)$ могутъ различаться лишь постояннымъ слагаемымъ, ибо, если $F'(x) = f(x)$ и $\Phi'(x) = f(x)$,

то $\quad [\Phi(x) - F(x)]'_x = \Phi'(x) - F'(x) = 0$, а слѣд., $\Phi(x) - F(x) = C$,

гдѣ C — любое постоянное число. Поэтому, если $F(x)$ — есть одна изъ первообразныхъ, то общее выраженіе всѣхъ другихъ будетъ:

$$F(x) + C,$$

при чемъ C — наз. постоянной произвольной, ибо можно его взять какимъ угодно, но затѣмъ оно уже не мѣняется отъ измѣненія x'а.

Двучленъ $\qquad F(x) + C,$

въ которомъ $F(x)$ — какая либо первообразная функціи $f(x)$, а C — постоянная произвольная, наз. **неопредѣленнымъ интеграломъ** функціи $f(x)$

и обозначается знакомъ $\qquad \int f(x)\,dx;$

такимъ образомъ, если $\qquad F(x) = \int f(x)\,dx,$

то $\qquad F'(x) = f(x) \quad$ и, слѣд., $\quad dF(x) = f(x)\,dx;$

функція $f(x)$ наз. **подъинтегральною**, а произведеніе $f(x)\,dx$. наз. **подъинтегральнымъ выраженіемъ**; поэтому два послѣднихъ равенства можемъ прочесть такъ: производная интеграла по аргументу равна подъинтегральной функціи, а диференціалъ интеграла равенъ подъинтегральному выраженію. Отмѣтимъ еще, для ихъ сравненія, два слѣдующихъ равенства.

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \quad \text{а} \quad \int d\,f(x) = f(x)+C.$$

183. Опредѣленіе 2. Интеграломъ функціи f(x), взятымъ въ границахъ отъ а до x, наз. та изъ ея **непрерывныхъ** первообразныхъ, которая обращается въ нуль, при подведеніи x къ a, ее обозначаютъ знакомъ $\int_a^x f(x)\,dx$.

Опредѣленіе 3. Опредѣленнымъ интеграломъ функціи f(x), взятымъ отъ а до b, наз., **частное значеніе** $\int_a^x f(x)\,dx$, при $x=b$; онъ обозначается такъ: $\int_a^b f(x)\,dx$, при чемъ числа a и b наз. его нижнимъ и верхнимъ предѣлами интегрированія.

Теорема. Опредѣленный интегралъ, взятый отъ a до b, равенъ разности значеній одной и той-же первообразной функціи $F(x)$, вычисленныхъ для верхняго и нижняго предѣловъ интеграла, **если только эта первообразная непрерывна на всемъ участкѣ (a, b),**

Дѣйствительно, такъ какъ $F(x)$ и $\int_a^x f(x)\,dx$ суть первообразныя для $f(x)$, то

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)+C;$$

подводя же здѣсь x къ a и помня, что $F(x)$ — по условію, а $\int_a^x f(x)\,dx$ — по опредѣленію непрерывны, получаемъ:

$$0 = F(a)+C, \quad \text{откуда } C = -F(a)$$

и, слѣд.,

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a),$$

а потому

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Для сокращенія письма условимся разность $F(b)-F(a)$ обозначать такъ:

$$\Big|_a^b F(x);$$

напр.,

$$\text{Sin } 60^0 - \text{Sin } 30^0 = \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \text{Sin } x.$$

тогда, значитъ, $\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x).$

Слѣдствіе 1. Величина опредѣленнаго интеграла не зависитъ отъ того, какой **буквой** обозначенъ аргументъ такъ что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b f(\xi)\,d\xi = \dots$$

Слѣдствіе 2. Опредѣленный интегралъ, верхній и нижній предѣлы коего одинаковы, равенъ нулю.

Слѣдствіе 3. Отъ перестановки предѣловъ опредѣленнаго интеграла мѣняется лишь его знакъ, ибо, по предъидущему:

$$\int_b^a f(x)\,dx = f(a) - f(b) = -[f(b) - f(a)] = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Слѣдствіе 4. Интегралъ на полномъ участкѣ равенъ суммѣ интеграловъ на всѣхъ его частяхъ, ибо

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx =$$

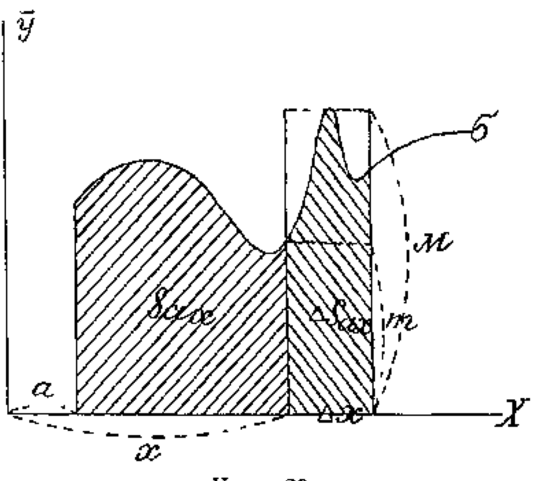
$$= [F(a_1) - F(a)] + [F(a_2) - F(a_1)] + \dots + [F(a_n) - F(a_{n-1})] +$$

$$+ [F(b) - F(a_n)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

184. Геометрическое значеніе интеграла. Положимъ, что функція $f(x)$ непрерывна на участкѣ (a, A), построимъ при прямоугольныхъ осяхъ кривую σ, выражаемую ур-ніемъ

$$y = f(x),$$

и разсмотримъ площадь S_{ax}, ограниченную: этой кривой, осью OX и ординатами, отвѣчающими абсциссамъ a и x, гдѣ x заключается между a и A; при этомъ условимся площади **надъ** осью OX счи-



Черт. 28.

тать **положительными**, а **подъ** нею—**отрицательными**. Дадимъ абсциссѣ x приращеніе $\triangle x$ и обозначимъ черезъ $\triangle S_{ax}$ — соотвѣтствующее приращеніе площади, а черезъ m и M — наименьшее и наибольшее значенія ординаты на участкѣ $\triangle x$; тогда, построивъ прямоугольники съ основаніемъ $\triangle x$ и съ высотами m и M, получимъ что $\triangle S_{ax}$ заключается во всѣхъ возможныхъ случаяхъ между площадями этихъ прямоугольниковъ, т. е. между произведеніями $m \cdot \triangle x$ и $M \cdot \triangle x$ *), а слѣд.,

$$m < \frac{\triangle S_{ax}}{\triangle x} < M.$$

Подводя теперь $\triangle x$ къ нулю и замѣчая, что, вслѣдствіе непрерывности $f(x)$, имѣемъ:

$$\text{Пред. } m = \text{Пред. } M = f(x),$$

заключаемъ, что и

$$\text{Пред.} \left(\frac{\triangle S}{\triangle x}\right) = f(x), \quad \text{т. е.} \quad S'_x = f(x).$$

Итакъ, производная по абсциссѣ отъ вышеупомянутой площади равна соотвѣтствующей ординатѣ кривой, такъ что площадь эта есть одна изъ первообразныхъ для $f(x)$, и, очевидно, именно та, которая обращается въ нуль при $x = a$; слѣд.,

$$S_{ax} = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Замѣняя же здѣсь x на b, получаемъ, что площадь S_{ab}, ограниченная непрерывной кривой $y = f(x)$, осью абсциссъ и ординатами, отвѣчающими абсциссамъ a и b, выражается взятымъ въ предѣлахъ отъ a до b опредѣленнымъ интеграломъ отъ функціи, выражающей ординату кривой,

т. е.
$$S_{ab} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Замѣчаніе 1. Въ виду сдѣланнаго выше условія относительно

*) Такъ какъ эти произведенія, а слѣд., и $\triangle S$ при $\triangle x > 0$ имѣютъ знакъ самой ординаты, то поэтому и является необходимымъ сдѣланное выше условіе насчетъ знака площади.

площадокъ надъ осью OX и подъ нею, ясно, что $\int_a^b f(x)\ dx$ выражаетъ разность между геометрическими площадями надъ осью OX и подъ ней, если же требуется найти сумму всѣхъ этихъ площадей, то, очевидно, надо найти точки a_1, a_2, ... a_n, въ которыхъ кривая $y=f(x)$ пересѣкаетъ ось OX, и, вычисливъ интегралы $\int_a^{a_1} f(x)\ dx$, $\int_{a_1}^{a_2} f(x)\ dx$, .. $\int_{a_n}^{b} f(x)\ dx$, сложить ихъ абсолютныя величины.

Замѣчаніе 2. Если подъинтегральная функція разрывается, напр., въ точкахъ a_1, a_2, ... a_n, то, проводя ординаты еще и черезъ эти точки, получаемъ:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{a_1} f(x)\ dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\ dx + \dots + \int_{a_n}^{b} f(x)\ dx = S_{aa_1} + S_{a_1a_2} + \dots + S_{a_nb},$$

такъ что въ самомъ общемъ случаѣ опредѣленный интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$ выражаетъ площадь, ограниченную: 1) осью OX; 2) кривой $y=f(x)$, и 3) ординатами, отвѣчающими предѣламъ a и b интеграла и **точкамъ разрыва** подъинтегральной функціи.

185. Теорема о среднихъ. Если подъинтегральная функція непрерывна на участкѣ интегрированія, то опредѣленный интегралъ равенъ произведенію величины этого участка на значеніе подъинтегральной функціи при промежуточной величинѣ аргумента.

Дѣйствительно, пусть $\int f(x)\ dx = F(x)$ и, слѣд., $F'(x) = f(x)$, при чемъ функціи $f(x)$ и $F(x)$ непрерывны на участкѣ (a, b); тогда

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a),$$

а по теоремѣ Лаграниса имѣемъ

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)=f(\xi),$$

при чемъ
$$a<\xi<b,$$

отсюда и получаемъ, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f'(\xi).$$

186. Опредѣленный интегралъ, какъ предѣлъ суммы. Если разобьемъ участокъ (a, b) точками $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ на части, то на основаніи № 183-го (слѣдствіе 4-е), имѣемъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{a_1} f(x)\,dx+\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx+\ldots+\int_{a_{n-1}}^b f(x)\,dx;$$

обозначая же черезъ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ нѣкоторыя опредѣленныя промежуточныя числа соотвѣтственно между a и a_1, a_1 и a_2, $\ldots a_{n-1}$ и b, и предполагая, что $f(x)$ непрерывна на всемъ участкѣ (a, b), по теоремѣ о среднихъ имѣемъ:

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx=f(\xi_1)\,(a_1-a);\quad \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx=f(\xi_2)\,(a_2-a_1),\ldots$$

$$\int_{a_{n-1}}^b f(x)\,dx=f(\xi_n)\,(b-a_{n-1})$$

и, слѣд.,

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi_1)\,(a_1-a)+f(\xi_2)\,(a_2-a_1)+\ldots+f(\xi_n)\,(b-a_{n-1});$$

а если для краткости положимъ

$$a_1-a=\Delta_1 x,\qquad a_2-a_1=\Delta_2 x,\ldots\qquad b-a_{n-1}=\Delta_n x,$$

то
$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi_1)\,\Delta_1 x+f(\xi_2)\,\Delta_2 x+\ldots+f(\xi_n)\,\Delta_n x=$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\,\Delta_k x.$$

Уменьшая теперь всѣ части $\Delta_k x$ до нуля (и, слѣд., увеличивая ихъ число до ∞), въ предѣлѣ получимъ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Пред.}\left[\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta_k x\right]_{\Delta_k x \ldots 0},$$

гдѣ всякое ξ_k есть нѣкоторое опредѣленное промежуточное значеніе x'а на участкѣ $\Delta_k x$; но если x_k есть какое-бы то ни было другое промежуточное значеніе x'а на томъ же участкѣ, то, вслѣдствіе непрерывности $f(x)$, разность $f(\xi_k) - f(x_k)$ безк.-мала, ибо $\xi_k - x_k$ безк.-мало; значитъ, $f(\xi_k)\,\Delta_k x$ и $f(x_k)\,\Delta_k x$ различаются на безк.-малую выше 1-го порядка, т. е. эквивалентны другъ другу, а потому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Пред.}\left[\sum_a^b f(x_k)\,\Delta_k x\right]_{\Delta_k x \ldots 0},$$

гдѣ x_k — **любое** изъ значеній x'а на участкѣ $\Delta_k x$.

Замѣчаніе. Предѣлъ послѣдней суммы не измѣнится, если мы любое конечное число ея слагаемыхъ замѣнимъ другими безк.-малыми или вовсе ихъ выбросимъ, отсюда слѣдуетъ, что послѣднее равенство останется справедливо и тогда, когда подъинтегральная функція разрывается на участкѣ (a, b), если только число такихъ разрывовъ конечно. Дѣйствительно-пусть разрывъ происходитъ въ точкахъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$;

тогда $$\int_b^a f(x)\,dx = \int_a^{\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha m}^b f(x)\,dx =$$

$$= \text{Пред.}\left[\sum_a^{\alpha_1} f(x_k)\,\Delta_k x\right] + \text{Пред.}\left[\sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x_k)\,\Delta_k x\right] + \ldots +$$

$$+ \text{Пред.}\left[\sum_{\alpha_m}^b f(x_k)\,.\,\Delta_k x\right] =$$

$$= \text{Пред.}\left\{\sum_a^{\alpha_1} f(x_k)\,.\,\Delta_k x + \sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x_k)\,.\,\Delta_k x + \ldots + \sum_{\alpha_m}^b f(x_k)\,.\,\Delta_k x\right\}_{\Delta_k x \ldots 0};$$

и если остальныя точки дѣленій и числа x_k одни и тѣ-же, то

$$\sum_{a}^{b} f(x_k)\Delta_k x$$

и

$$\left\{\sum_{a}^{\alpha_1} f(x_k)\Delta_k x + \sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x_k)\Delta_k x + \ldots + \sum_{\alpha_n}^{b} f(x_k)\Delta_k x\right\}$$

различаются лишь тѣми слагаемыми, которыя отвѣчають участкамъ, заключающимъ точки α разрыва, а такъ какъ число ихъ конечно и сами они безк. малы, то и сумма ихъ безк.-мала, а потому

$$\text{Пред.}\left\{\sum_{a}^{\alpha_1} f(x_k)\Delta_k x + \sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x_k)\Delta_k x + \ldots + \sum_{\alpha_n}^{b} f(x_k)\Delta_k x\right\} =$$

$$= \text{Пред.}\left[\sum_{a}^{b} f(x_k)\Delta_k x\right],$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Пред.}\left[\sum_{a}^{b} f(x_k)\Delta_k x\right]_{\Delta_k x \ldots 0}$$

Основные пріемы интегрированія функцій.

187. I. Непосредственное интегрированіе совершается на основаніи формулъ для производныхъ простѣйшихъ функцій; напр., такъ какъ

$$\left(x^{n+1}\right)'_x = (n+1)x^n$$

и, слѣд.,

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'_x = x^n, \text{ то } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ при } n \neq -1,$$

а

$$\int x^{-1}dx = \int\frac{dx}{x} = lx + C, \text{ ибо } l'_x x = \frac{1}{x};$$

полагая же въ первой изъ этихъ формулъ $n = -m$, еще получаемъ:

$$\int x^{-m}dx = \frac{x^{-m+1}}{-m+1} + C \text{ или } \int\frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + C \text{ при } m \neq 1$$

Подобнымъ же образомъ можемъ получить рядъ другихъ формулъ; ихъ необходимо помнить наизусть, почему онѣ и собраны въ слѣдующей таблицѣ:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ при } n \neq -1. \qquad \int \frac{dx}{x} = lx + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + C \text{ при } m \neq 1; \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{Arctg}\, x + C = -\mathrm{Arccotg}\, x + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\, x + C = -\mathrm{Arccos}\, x + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} = \mathrm{Arcsec}\, x + C = -\mathrm{Arccosec}\, x + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C;$$

$$\int \mathrm{Sin}\, x\, dx = -\mathrm{Cos}\, x + C; \qquad \int \mathrm{Cos}\, x\, dx = \mathrm{Sin}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}^2 x} = -\mathrm{Cotg}\, x + C, \qquad \int \frac{dx}{\mathrm{Cos}^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$$

188. Когда непосредственное интегрированіе не удается, пользуются однимъ изъ трехъ прочихъ пріемовъ, при чемъ часто полезна слѣдующая

Теорема. Постоянный множитель можно выносить изъ подъ знака интеграла, ибо, если

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \quad \text{такъ что} \quad f(x) = F'(x),$$

то
$$a f(x) = a F'(x) = [a F(x)]'_x$$

и, слѣд.,
$$\int a f(x)\, dx = a F(x) + C,$$

т. е.
$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx + C_1$$

189. II. Измѣненіе перемѣнной (независимой). Этотъ пріемъ примѣнимъ тогда, когда подъинтегральная функція $f(x)$ можетъ быть представлена въ видѣ произведенія $\varphi(u) \cdot u'_x$, гдѣ u—нѣкоторое сложное число—напр., $u=\theta(x)$, именно, въ такомъ случаѣ

$$f(x)\,dx = \varphi(u)\,u'_x \,.\, dx = \varphi(u)\,du,$$

и если мы можемъ найти $\int \varphi(u)\,du$ —напр., если

$$\int \varphi(u)\,du = \Phi(u) + C \quad \text{и, слѣд.,} \quad \varphi(u) = \Phi'_u(u),$$

то искомый
$$\int f(x)\,dx = \Phi\left[\theta(x)\right] + C,$$

ибо по теоремѣ о производной функціи сложнаго числа, имѣемъ, что

$$\Phi'_x\left[\theta(x)\right] = \Phi'_x(u) = \Phi'_u(u) \,.\, u'_x = \varphi(u) \,.\, u'_x = f(x)$$

Прим. 1. Полагая $x+\alpha=z$, имѣемъ $dx=dz$ и, слѣд.,

$$\int \frac{dx}{(x+\alpha)^m} = \int \frac{dz}{z^m} = -\frac{1}{(m-1)z^{m-1}} + C = -\frac{1}{(m-1)(x+\alpha)^{m-1}} + C \text{ при } m \neq 1$$

и
$$\int \frac{dx}{x+\alpha} = \int \frac{dz}{z} = lz + C = l(x+\alpha) + C.$$

Прим. 2.
$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}x \operatorname{Cos}x} = \int \frac{\dfrac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x}}{\dfrac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}} = \int \frac{d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x} = l\operatorname{tg}x + C$$

Прим. 3.
$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos}^2 x} = 4\int \frac{dx}{(2\operatorname{Sin}x \operatorname{Cos}x)^2} = 2\int \frac{d2x}{(\operatorname{Sin}2x)^2} = -2\operatorname{Cotg}2x + C.$$

Прим. 4.
$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\int \frac{d\frac{x}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{Arctg}\frac{x}{3} + C$$

Прим. 5.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C.$$

190. III. Разложеніе (подъинтегральной функціи) **на слагаемыя.** Основаніемъ для этого пріема служитъ слѣдующая

Теорема. Интегралъ алгебрической суммы конечнаго числа функцій равенъ такой же алгебрической суммѣ ихъ интеграловъ. Дѣйствительно, если

$$\int f(x)\,dx = F(x),\quad \int \varphi(x)\,dx = \Phi(x)\quad \text{и}\quad \int \omega(x)\,dx = \Omega(x),$$

такъ что $\qquad f(x) = F'(x),\quad \varphi(x) = \Phi'(x)\quad$ и $\quad \omega(x) = \Omega'(x),$

то $f(x) + \varphi(x) - \omega(x) = F'(x) + \Phi'(x) - \Omega'(x) = \Big[F(x) + \Phi(x) - \Omega(x)\Big]'_x$

и, слѣд., $\qquad \int\Big[f(x) + \varphi(x) - \omega(x)\Big]dx = F(x) + \Phi(x) - \Omega(x),$

т. е. $\quad \int\Big[f(x) + \varphi(x) - \omega(x)\Big]dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \omega(x)\,dx$ (*).

Прим. 1. $\displaystyle\int\frac{2a\,dx}{x^2-a^2} = \int\Big[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big]dx = \int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x+a} = l(x-a) -$

$$- l(x+a) + C = l\,\frac{x-a}{x+a} + C.$$

Прим. 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\mathrm{Sin}^2x\,\mathrm{Cos}^2x} = \int\frac{\mathrm{Sin}^2x + \mathrm{Cos}^2x}{\mathrm{Sin}^2x\,\mathrm{Cos}^2x}\,dx = \int\frac{\mathrm{Sin}^2x}{\mathrm{Sin}^2x\,\mathrm{Cos}^2x}\,dx +$

$$+ \int\frac{\mathrm{Cos}^2x}{\mathrm{Sin}^2x\,\mathrm{Cos}^2x}\,dx = \int\frac{dx}{\mathrm{Cos}^2x} + \int\frac{dx}{\mathrm{Sin}^2x} = \mathrm{tg}\,x - \mathrm{Cotg}\,x + C = \frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x} - \frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x} + C$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}^2x - \mathrm{Cos}^2x}{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x} + C = -\frac{2\,\mathrm{Cos}\,2x}{\mathrm{Sin}\,2x} = -2\,\mathrm{Cotg}\,2x + C.$$

191. IV. Интегрированіе по частямъ. Оно основано на формулѣ

$$\int \mathbf{p}d\mathbf{q} = \mathbf{pq} - \int \mathbf{q}d\mathbf{p},$$

которая вытекаетъ изъ того, что

$$\int p\,dq + \int q\,dp = \int (p\,dq + q\,dp) = \int d(pq) = pq.$$

(*) Мы не пишемъ при каждомъ изъ интеграловъ „постоянной произвольной", такъ какъ всѣ ихъ можно соединить въ одну и, пока есть хоть одинъ знакъ $\int$, ее можно подразумѣвать скрытой подъ нимъ.

примѣняется же этотъ способъ тогда, когда подъинтегральная функція представляетъ произведеніе двухъ другихъ—напр, пусть

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \omega(x), \quad \text{такъ что} \quad \int f(x)\,dx = \int \varphi(x)\,\omega(x)\,dx$$

въ такомъ случаѣ, если мы можемъ найти, напр., $\int \omega(x)\,dx$,

то, полагая $\qquad \varphi(x) = p \quad \text{и} \quad \int \omega(x)\,dx = q$

откуда $\qquad \omega(x)\,dx = dq,$

имѣемъ $\qquad \int \varphi(x)\,\omega(x)\,dx = \varphi(x) \cdot q - \int q \cdot \varphi'(x)\,dx$

и если послѣдній интегралъ проще заданнаго, то значитъ, мы приблизились къ отысканію послѣдняго.

Такъ какъ q находится интегрированіемъ лишь части произведенія, то отсюда и само названіе способа; дѣйствіе же отысканія q т. е. $\int \omega(x)\,dx$ наз. подведеніемъ $\omega(x)$ подъ знакъ дифференціала.

Прим. 1 $\qquad \int \underbrace{lx}_{p}\,\underbrace{dx}_{dq} = xlx - \int x\,\frac{dx}{x} = x\,(lx - 1) + C.$

Прим. 2. $\int \underbrace{(x^2+3x-5)}_{p}\,\underbrace{\mathrm{Sin}\,x\,dx}_{dq} = \int (x^2+3x-5)\,d\big(\underbrace{-\mathrm{Cos}\,x}_{q}\big) =$

$$= \underbrace{-(x^2+3x-5)\,\mathrm{Cos}\,x}_{A} + \int \mathrm{Cos}\,x \cdot (2x+3)\,dx = A + \int (2x+3)\,\mathrm{Cos}\,x\,dx = A +$$

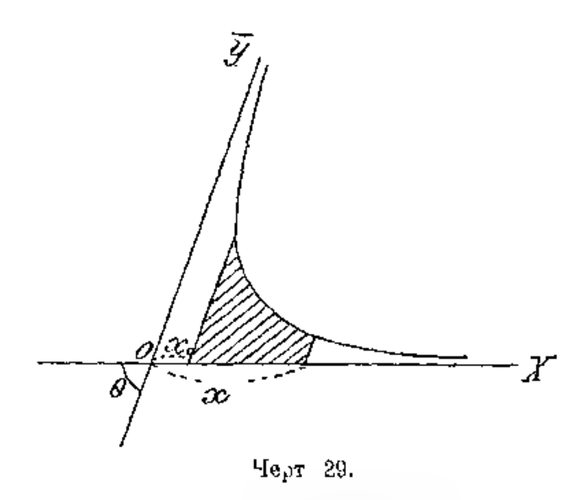
$$+ \int (2x+3)\,d\,\mathrm{Sin}\,x = A + (2x+3)\,\mathrm{Sin}\,x - \int \mathrm{Sin}\,x \cdot 2\,dx = -(x^2+3x-7)\,\mathrm{Cos}\,x +$$

$$+ (2x+3)\,\mathrm{Sin}\,x + C$$

Прим. 3 $\quad I = \int e^x\,\mathrm{Sin}\,x\,dx = \int \mathrm{Sin}\,x\,d(e^x) = \underbrace{\mathrm{Sin}\,x\,e^x}_{A} - \int e^x\,\mathrm{Cos}\,x\,dx =$

$$= A - \int \mathrm{Cos}\,x\,d(e^x) = A \underbrace{-\mathrm{Cos}\,x \cdot e^x}_{B} - \int e^x\,\mathrm{Sin}\,x\,dx = A + B - I + C,$$

слѣд. $\qquad 2I = A + B + C, \quad \text{а} \quad I = \frac{\mathrm{Sin}\,x - \mathrm{Cos}\,x}{2}\,e^x + C'$



Черт 29.

Задача 1. Найти площадь S_{x_0x}, ограниченную гиперболой, ея ассимптотой и двумя параллелями другой ассимптотѣ.

Беря ассимптоты за оси координатъ, выразимъ гиперболу, какъ извѣстно, ур-ніемъ:

$$xy = \frac{c^2}{4}, \text{ откуда } y = \frac{c^2}{4x}$$

и, слѣд.,
$$S_{x_0x} = \operatorname{Sin}\theta \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{c^2}{4x}\, dx = \frac{c^2}{4} \operatorname{Sin}\theta \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} =$$
$$\frac{c^2}{4} \operatorname{Sin}\theta \cdot \Big[lx \Big]_{x_0}^{x} = \frac{c^2}{4} \operatorname{Sin}\theta \cdot (lx - lx_0) = \frac{c^2}{4} \operatorname{Sin}\theta \cdot l\frac{x}{x_0},$$

если гипербола равнобочная, такъ что $\theta = 90^0$ и $Sin\,\theta = 1$, и если кромѣ того $C^2 = 4$, а $x_0 = 1$, то просто
$$S_{x_0x} = lx;$$
отсюда и происходитъ наименованіе Неперовыхъ логарифмовъ еще гиперболическими.

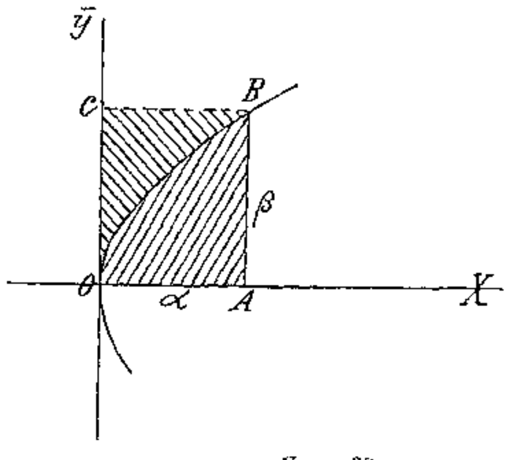
Задача 2. Найти площадь S, ограниченную параболой $y^2 = 2px$, ея осью и перпендикуляромъ къ оси, проведеннымъ на разстояніи α отъ вершины.

Такъ какъ $$y = \sqrt{2px},$$

то $$S = \int_0^{\alpha} \sqrt{2px}\,.\,dx = \sqrt{2p}\,.\int_0^{\alpha} x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p}\,.\Big[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{\alpha} = \frac{2}{3} \sqrt{2p}\,.\,\alpha^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2p\alpha}\,.\,\alpha = \frac{2}{3}\,\alpha\beta,$$

а, значитъ, площадь фигуры OBC равна $\frac{1}{3}$ площади прямоугольника $\alpha\beta$; этотъ послѣдній результатъ найденъ впервые еще Архимедомъ (285—215 г. до $P.\ X.$) и представляетъ первый случай точнаго выраженія криволинейной площади.



Черт. 30.